4. Produit de convolution

— Exercices de base —

Exercice 1. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } -1\le x\le 3\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\qquad\text{et}\qquad g(x)=\begin{cases}x/2 & \text{si } 0\le x\le 2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$
(a) Calculer si possible le produit de convolution de f et g.

(b) Représenter le graphique des fonctions f, g et $f\star g$.

Exercice 2. (a) Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x)=e^x\chi_{[1,+\infty[}(x)\quad\text{et}\quad g(x)=x\chi_{[-1,+\infty[}(x).$$
Montrer que le produit de convolution $f\star g$ est défini sur $\mathbb{R}$ et donner sa valeur en tout point de $\mathbb{R}$.

(b) Même question si
$$f(x)=|x|\quad\text{et}\quad g(x)=\frac{1}{(1+x^2)^2}.$$
(c) Même question si
$$f(x)=e^{-|x|}\quad\text{et}\quad g(x)=e^{-|x|}.$$

Exercice 3. Soit l'échelon de Heaviside $Y=\chi_{]0,+\infty[}$. Pour tous $m\in\mathbb{N}_0$ et $\lambda\in\mathbb{C}$, on pose
$$Y_\lambda^{(m)}(x)=\frac{e^{\lambda x}x^{m-1}}{\Gamma(m)}\,Y(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$
Montrer que, pour $m,n\in\mathbb{N}_0$ et $\lambda\in\mathbb{C}$, on a
$$Y_\lambda^{(m+n)}=Y_\lambda^{(m)}\star Y_\lambda^{(n)}.$$

Exercice 4. Soient $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $0<a<b$. Si on pose
$$f(x)=e^{-ax}\chi_{[0,+\infty[}(x)\quad\text{et}\quad g(x)=e^{-bx}\chi_{[0,+\infty[}(x),$$
montrer que
$$\int_0^{+\infty}\frac{(f\star g)(x)}{x}\,dx=\frac{\ln(b/a)}{b-a}.$$

Exercice 5. Calculer si possible $\chi_A\star\chi_B$ lorsque
$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 1\}\quad\text{et}\quad B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:-1\le x\le 1\}.$$

Exercice 6. Pour $k\in\mathbb{N}_0$, on pose
$$e_k(x)=\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\chi_{]0,+\infty[}(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$
Montrer que
$$D^n(e_m\star\varphi)=e_{m-n}\star\varphi\quad\text{et}\quad D^k(e_k\star\varphi)=\varphi$$
pour tous $n,m,k\in\mathbb{N}_0$ tels que $m>n$ et $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

— Autres exercices —

Exercice 7. Soit $f \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$. Posons

$$h(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\,dt, \quad x \geq 0.$$

Montrer que la fonction h est définie et continue sur $[0,+\infty[$ et que l'on a

$$\lim_{x \to +\infty} e^x h(x) = 0.$$

Exercice 8. Soit $a \in]0,+\infty[$ et H_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H_a(x) = \frac{1}{a}\chi_{]0,a[}.$$

Soit $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$ une suite de nombres strictement positifs tel que $a = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ converge. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$u_k = H_{a_0} \star \ldots \star H_{a_k}.$$

Il est demandé de prouver que

(a) Pour tout $k \geqslant 1$, $u_k \in C^{k-1}(\mathbb{R})$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{supp}(u_k) \subset [0,a]$.

(c) La suite u_k converge vers une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}(u) \subset [0,a]$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} u(x)dx = 1$.

(d) On les inégalités

$$\sup_{x \in [0,a]} |(D^k u)(x)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |(D^{k+1}u)(x)|dx \leqslant \frac{2^k}{a_0 \ldots a_k},$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 (Critère d'annulation** *pp).** Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Montrer que $f = 0$ *pp* dans Ω si et seulement si

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.