Année académique 2017-2018
2e Bloc Maths-Physique

7. Séries trigonométriques de Fourier

— Exercices de base —

Exercice 1. Soit E l'ensemble des polynomes complexes de degré plus petit ou égal à 2.

(1) Montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

(2) Si $P, Q \in E$, on définit
$$\langle P, Q\rangle = P(0)\overline{Q(0)} + P(1)\overline{Q(1)} + P(i)\overline{Q(i)}.$$
Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

(3) A quelles conditions sur $a, b, c \in \mathbb{C}$ l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par
$$\langle P, Q\rangle = P(a)\overline{Q(a)} + P(b)\overline{Q(b)} + P(c)\overline{Q(c)},$$
pour tout $P, Q \in E$, est-elle un produit scalaire sur E ?

Exercice 2. Posons $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, posons
$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$
Le polynome P_n est appelé polynome de Legendre de degré n.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver que P_n est effectivement un polynome de degré n.

(2) Démontrer la formule de Rodrigues
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n\left((x^2-1)^n\right).$$

(3) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que le polynome P_n est une solution particulière de l'équation différentielle
$$D((1-x^2)Df(x)) + n(n+1)f(x) = 0.$$

(4) En déduire que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale dans $L^2([-1,1])$.

Exercice 3. On considère l'espace de Hilbert $L^2([0,1])$.

(1) Montrer que les fonctions f et g définies par $f(x) = \cos(2\pi x)$ et $g(x) = e^{4i\pi x}$ y sont orthogonales.

(2) Développer les fonctions g_1, g_2, g_3 en série trigonométrique de Fourier dans cet espace, en exprimant la réponse finale à l'aide de fonction sinus et cosinus et en simplifiant au maximum l'expression.
$$g_1(x) = \cos(10\pi x), \quad g_2(x) = \cos^4(\pi x), \quad g_3(x) = \cos(\pi x).$$

(3) En déduire que
$$\frac{\sqrt{2}}{16}\pi = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{2m-1}{16m^2 - 16m + 3}.$$

Exercice 4. On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de f sur $[-\pi, \pi]$.
(2) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

Exercice 5. (1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction f donnée par $f(x) = |\sin(x)|$, $x \in \mathbb{R}$.
(2) Déterminer la somme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2-1}.$$

Exercice 6. (1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier sur $[-\pi, \pi]$ de la fonction f donnée par $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.
(2) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m^2+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2+1}.$$

— Autres exercices —

Exercice 7 (Noyau de Poisson). Pour tout $r \in [0, 1[$, on pose

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on pose aussi $e_m(x) = e^{imx}$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) Pour tous $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que

$$P_r(\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|} e_m(\theta).$$

(2) Pour tout $r \in [0, 1[$, calculer (si possible) la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\, d\theta.$$

(3) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2π. Montrer que

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|} \langle f, e_m\rangle \, e_m(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P_r(\theta - t)\, dt$$

pour tous $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. En déduire que

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|} \langle f, e_m\rangle \, e_m(\theta) = f(\theta)$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 ***(Formule sommatoire de Poisson).*** Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $x \mapsto x^2 f(x)$ soit borné sur $\mathbb{R}$. Démontrer que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}^-_{2\pi m} f)\, e^{2i\pi m x}$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$