Année académique 2017-2018
2e Bloc Maths-Physique

Travail dirigé 2

Exercice 1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(a) Il existe une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\mathcal{F}_y^- f = \frac{y^2}{1+y^2}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

(b) Si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que sa transformée de Fourier est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors f est borné (presque partout) sur $\mathbb{R}$.

(c) Le produit d'une fonction de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ par sa transformée de Fourier est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Calculer la transformée de Fourier des fonctions f et g données par

$$f(x) = e^{-|x|}, \quad g(x) = e^{-x}\chi_{]0,+\infty[}(x).$$

Exercice 3. Soient les fonctions f, g et h définies explicitement par

$$f(x) = i\pi \sin(x)\,\chi_{[-\pi,\pi]}(x), \quad g(x) = \frac{1-\cos(x)}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^2-1}.$$

Montrer que f est continu sur $\mathbb{R}$ et que g et h se prolongent continûment sur $\mathbb{R}$. Déterminer si possible la transformée de Fourier de ces fonctions. Préciser à chaque fois s'il s'agit d'une transformée de Fourier de fonction intégrable ou de fonction de carré intégrable.

Exercice 4. Pour tout $a \in \mathbb{R}_0$, calculer si possible la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)\sin(x)}{x(x^2+a^2)}\,dx.$$

Exercice 5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $b > a > 0$. Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) La fonction f est-elle intégrable ? De carré intégrable ?

(b) Déterminer si possible la transformée de Fourier de Df.

(c) En déduire si possible la transformée de Fourier de f.

Exercice 6. Soit la fonction impaire f définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$ si $x \in [0, \pi]$.

(a) Développer si possible cette fonction en série trigonométrique de Fourier sur $[-\pi, \pi]$. Exprimer votre réponse en utilisant uniquement des fonctions sinus et cosinus et simplifier au maximum vos calculs.

(b) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^6}.$$

Exercice 7. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{cx}\chi_{]0,+\infty[}(x)$ où c est un paramètre complexe.

(a) Déterminer si possible le produit de convolution $f \star f$ en tout point de $\mathbb{R}$.

(b) Pour quelles valeurs complexes de c la fonction $f \star f$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 8. Soit $f \in \mathrm{C}_1([0, 2\pi])$ une fonction à valeurs réelles telle que $f(0) = f(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$.

(a) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} (f(t))^2\,dt \leq \int_0^{2\pi} (Df(t))^2\,dt.$$

(b) Montrer que l'égalité a lieu si et seulement si $f = a\cos + b\sin$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

F. Bastin & C. Dubussy – 15 novembre 2017