Année académique 2018-2019
2e Bloc Maths-Physique

4. Produit de convolution

— Exercices de base —

Exercice 1. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) Calculer si possible le produit de convolution de f et g.

(b) Représenter le graphique des fonctions f, g et $f \star g$.

Exercice 2. (a) Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x \chi_{[1,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = x\chi_{[-1,+\infty[}(x).$$

Montrer que le produit de convolution $f \star g$ est défini sur $\mathbb{R}$ et donner sa valeur en tout point de $\mathbb{R}$.

(b) Même question si

$$f(x) = |x| \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

(c) Même question si

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-|x|}.$$

Exercice 3. Soit l'échelon de Heaviside $Y = \chi_{]0,+\infty[}$. Pour tous $m \in \mathbb{N}_0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose

$$Y_\lambda^{(m)}(x) = \frac{e^{\lambda x} x^{m-1}}{\Gamma(m)} Y(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que, pour $m, n \in \mathbb{N}_0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$Y_\lambda^{(m+n)} = Y_\lambda^{(m)} \star Y_\lambda^{(n)}.$$

Exercice 4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Si on pose

$$f(x) = e^{-ax}\chi_{[0,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-bx}\chi_{[0,+\infty[}(x),$$

montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{(f \star g)(x)}{x}\, dx = \frac{\ln(b/a)}{b-a}.$$

Exercice 5. Calculer si possible $\chi_A \star \chi_B$ lorsque

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \text{et} \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}.$$

Exercice 6. Pour $k \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$e_k(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\chi_{]0,+\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que

$$D^n(e_m \star \varphi) = e_{m-n} \star \varphi \quad \text{et} \quad D^k(e_k \star \varphi) = \varphi$$

pour tous $n, m, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $m > n$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

— Autres exercices —

Exercice 7. Soit $f \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$. Posons

$$h(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt, \quad x \geq 0.$$

Montrer que la fonction h est définie et continue sur $[0,+\infty[$ et que l'on a

$$\lim_{x\to+\infty} e^x h(x) = 0.$$

Exercice 8. Soit $a \in]0,+\infty[$ et H_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H_a(x) = \frac{1}{a}\chi_{]0,a[}.$$

Soit $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$ une suite de nombres strictement positifs tel que $a = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ converge. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$u_k = H_{a_0} \star \ldots \star H_{a_k}.$$

Il est demandé de prouver que

(a) Pour tout $k \geqslant 1$, $u_k \in C^{k-1}(\mathbb{R})$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{supp}(u_k) \subset [0,a]$.

(c) La suite u_k converge vers une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}(u) \subset [0,a]$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} u(x)dx = 1$.

(d) On a les inégalités

$$\sup_{x\in[0,a]} |(D^k u)(x)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |(D^{k+1}u)(x)|dx \leqslant \frac{2^k}{a_0 \ldots a_k},$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 (Critère d'annulation** *pp).** Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Montrer que $f = 0$ *pp* dans Ω si et seulement si

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx = 0$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.