

6. Transformation de Fourier de fonctions de carré intégrable

Exercice 1. Si possible, déterminer la transformée de Fourier des fonctions f , g et h définies par

(1) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2/2}$,

(2) $g : x \in \mathbb{R}_0 \mapsto \text{sign}(x) \frac{\sin(x)}{x}$,

(3) $h : x \in \mathbb{R}_0 \mapsto \text{arctg} \left(\frac{1}{x} \right)$.

Préciser à chaque fois s'il s'agit d'une transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Si $a > 0$ établir que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(a)}{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{2} \sin(a).$$

Exercice 3. On donne les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x + i}.$$

Déterminer la transformée de Fourier de f et de g . Préciser s'il s'agit d'une transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Si f et g sont de carré intégrable sur \mathbb{R} , montrer que

$$\mathcal{F}^+ (\mathbb{F}^- f \cdot \mathbb{F}^- g) = (2\pi)^n f \star g \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$