

7. Séries trigonométriques de Fourier

— Exercices de base —

Exercice 1. Soit E l'ensemble des polynômes complexes de degré plus petit ou égal à 2.

- (1) Montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel sur \mathbb{C} .
- (2) Si $P, Q \in E$, on définit

$$\langle P, Q \rangle = P(0)\overline{Q(0)} + P(1)\overline{Q(1)} + P(i)\overline{Q(i)}.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

- (3) A quelles conditions sur $a, b, c \in \mathbb{C}$ l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par

$$\langle P, Q \rangle = P(a)\overline{Q(a)} + P(b)\overline{Q(b)} + P(c)\overline{Q(c)},$$

pour tout $P, Q \in E$, est-elle un produit scalaire sur E ?

Exercice 2. Posons $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, posons

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

Le polynôme P_n est appelé polynôme de Legendre de degré n .

- (1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver que P_n est effectivement un polynôme de degré n .
- (2) Démontrer la formule de Rodrigues

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n ((x^2 - 1)^n).$$

- (3) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que le polynôme P_n est une solution particulière de l'équation différentielle

$$D((1-x^2)Df(x)) + n(n+1)f(x) = 0.$$

- (4) En déduire que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale dans $L^2([-1, 1])$.

Exercice 3. On considère l'espace de Hilbert $L^2([0, 1])$.

- (1) Montrer que les fonctions f et g définies par $f(x) = \cos(2\pi x)$ et $g(x) = e^{4i\pi x}$ y sont orthogonales.
- (2) Développer les fonctions g_1, g_2, g_3 en série trigonométrique de Fourier dans cet espace, en exprimant la réponse finale à l'aide de fonction sinus et cosinus et en simplifiant au maximum l'expression.

$$g_1(x) = \cos(10\pi x), \quad g_2(x) = \cos^4(\pi x), \quad g_3(x) = \cos(\pi x).$$

- (3) En déduire que

$$\frac{\sqrt{2}}{16} \pi = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{2m-1}{16m^2 - 16m + 3}.$$

Exercice 4. On donne la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- (1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de f sur $[-\pi, \pi]$.
- (2) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

Exercice 5. (1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction f donnée par $f(x) = |\sin(x)|$, $x \in \mathbb{R}$.

- (2) Déterminer la somme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2 - 1} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2 - 1}.$$

Exercice 6. (1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier sur $[-\pi, \pi]$ de la fonction f donnée par $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

- (2) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m^2 + 1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2 + 1}.$$

— Autres exercices —

Exercice 7 (Noyau de Poisson). Pour tout $r \in [0, 1[$, on pose

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on pose aussi $e_m(x) = e^{imx}$, $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Pour tous $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que

$$P_r(\theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} e_m(\theta).$$

- (2) Pour tout $r \in [0, 1[$, calculer (si possible) la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta.$$

- (3) Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} et périodique de période 2π . Montrer que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} \langle f, e_m \rangle e_m(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P_r(\theta - t) dt$$

pour tous $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. En déduire que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} \langle f, e_m \rangle e_m(\theta) = f(\theta)$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 (Formule sommatoire de Poisson). Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} telle que $x \mapsto x^2 f(x)$ soit borné sur \mathbb{R} . Démontrer que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}_{2\pi m}^- f) e^{2i\pi m x}$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$