1. Révisions

Exercice 1. Soit a un paramètre réel. Etudier la convergence de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ définie par

$$(1)\ x_m = 2^m a^m \qquad (2)\ x_m = \frac{m^2+2}{m^2+m+1}\,a^m \qquad (3)\ x_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{a}{(m+k)^2} \qquad (4)\ x_m = \frac{a^{\ln(m)}}{m^a}.$$

Exercice 2. Etudier la convergence des séries suivantes :

$$(1)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k^2)}{k^2} \qquad (2)\ \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k+3}{k^2-1} \qquad (3)\ \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{k^2+1}{k^3+1} \qquad (4)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{\sqrt[3]{k}}.$$

Exercice 3. (1) Pour quelles valeurs du paramètre réel α, la fonction

$$x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x^\alpha}$$

est-elle intégrable sur $]0,1[$?

(2) Pour quelles valeurs du paramètre réel β, la fonction

$$x \mapsto x^\beta (e^{-x} - 1)$$

est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

Exercice 4. Calculer si possible les intégrales suivantes :

$$(1)\ \int_0^{\pi/4} \sin(x)\cos(3x)\,dx \qquad (2)\ \int_{-\infty}^{0} e^{ix}\,dx \qquad (3)\ \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}.$$

Exercice 5. Calculer si possible les intégrales suivantes :

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln(x)}\,dx$ pour tous $a, b > 1$,

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-bx}\,\frac{\sin(ax)}{x}\,dx$ pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$.

Exercice 6. (1) Soit $\Omega =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Montrer que la fonction f définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{(1+y)(1+yx^2)}$$

est intégrable sur Ω et calculer son intégrale.

(2) En déduire que la fonction

$$x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$ et la valeur de son intégrale.

2. Intégrales eulériennes

— Exercices de base —

Exercice 1. Calculer si possible les limites

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{(m!)^{\frac{1}{m}}}{m} \qquad \text{et} \qquad \lim_{m\to+\infty} \left(\frac{\ln(m!)}{m} - \ln(m)\right).$$

Exercice 2. Exprimer $\Gamma(5/6)$ en fonction de $\Gamma(1/6)$.

Exercice 3. Etablir que pour tous $m > 0, n > -1, a > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^m} x^n dx = \frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) a^{-\frac{n+1}{m}}.$$

Exercice 4. Pour tout $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^x}.$$

Montrer que, pour tout $x > 1$, on a

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\, dt.$$

Exercice 5. Montrer que la mesure d'une boule de $\mathbb{R}^n$ de rayon $r > 0$ est donnée par la formule

$$\omega_n(r) = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma(n/2+1)}.$$

En déduire que $\omega_n(r) \to 0$ si $n \to +\infty$.

— Autres exercices —

Exercice 6. Prouver que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2 2^k}{(2k+1)!}$$

converge absolument et montrer que sa limite est égale à $\pi/2$.

Exercice 7 (Définition de Gauss de Γ). Démontrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) = \lim_{m\to+\infty} \frac{m^x\, m!}{x(x+1)\ldots(x+m)}.$$

Exercice 8. Prouver que

$$\int_0^1 \ln(\Gamma(x)) \sin(\pi x)\, dx = \frac{1+\ln(\pi/2)}{\pi}.$$

3. Convergences ponctuelle et uniforme

Exercice 1. Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme (sur $\mathbb{R}$) des suites $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

(a) $f_m(x) = \chi_{[-m,m]}(x)$ (b) $f_m(x) = m\chi_{[-m,m]}(x)$ (c) $f_m(x) = mx\chi_{[-\frac{1}{m},\frac{1}{m}]}(x)$.

Exercice 2. (a) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_m(x) = \frac{m^2 x}{1 + m^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$ ainsi que la convergence uniforme de $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$, sur $]0, +\infty[$, et sur les compacts de $]0, +\infty[$.

(b) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{x}{m}\chi_{[0,m]}(x) + (m + 1 - x)\chi_{]m,m+1]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ sur $\mathbb{R}$ ainsi que la convergence uniforme de $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ sur $\mathbb{R}$ et sur les intervalles $] - \infty, r]$ avec $r > 0$.

(c) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_m(x) = me^{-m^2 x}.$$

Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ sur $]0, +\infty[$ ainsi que la convergence uniforme de $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ sur $]0, +\infty[$ et sur les compacts de $]0, +\infty[$.

Exercice 3. Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle borné $]a, b[$ de $\mathbb{R}$. Si cette suite converge uniformément vers la fonction f sur $]a, b[$, montrer que f est intégrable sur $]a, b[$ et que

$$\int_a^b f_m(x)\, dx \to \int_a^b f(x)\, dx$$

si $m \to +\infty$.

En déduire que

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-m} = \int_0^1 x^{-x} dx.$$

Exercice 4. Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ la suite de fonctions définies par $f_m(x) = (1 - x^2)^m$, $x \in [0, 1]$.

(a) Etudier la convergence ponctuelle de cette suite sur $[0, 1]$.

(b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur $[0, 1]$ et sur les sous-intervalles de $[0, 1]$.

(c) Calculer la limite

$$\lim_{m\to+\infty} \int_0^1 (1 - x^2)^m\, dx.$$

Exercice 5. Soit la suite de fonctions $(f_M)_{M\in\mathbb{N}_0}$ définies pour tout $x \in [0, +\infty[$ par

$$f_M(x) = e^{-x} \sum_{m=0}^{M} \frac{(-1)^m}{m!} x^m.$$

Soit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}$. Prouver que la suite $(f_M)_{M\in\mathbb{N}_0}$ converge uniformément vers f sur $[0, +\infty[$.

Exercice 6. Développer la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en série de puissances naturelles de x.

Exercice 7. Posons
$$S(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m^2}.$$

(a) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de cette série.

(b) Où la fonction S est-elle définie, continue et dérivable ?

(c) Etablir qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que
$$S(x) + S(1-x) = a - \ln(x)\ln(1-x)$$
pour tout $x \in]0,1[$.

(d) Montrer que
$$a = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.$$
et que
$$a - \ln(2)^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2 2^{m-1}}.$$

Exercice 8. Etudier la convergence ponctuelle et uniforme des séries
$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2 m}\, x^m \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} (1+t^2)^{-m}\, dt \right) x^m.$$

Analyse II

Année académique 2021-2022
2^{e} Bloc Physique

4. Espaces normés et convergences liés à l'intégration

— Exercices de base —

Exercice 1. (a) Soit $\alpha > 0$ et soit la fonction f définie pour tout $x > 0$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x^\alpha)}{1 + x^{2\alpha}}.$$

Pour quelles valeurs de α cette fonction est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

(b) La fonction f définie par $f(x) = \ln|x - 1|$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ est-elle intégrable sur $]0, 1[$? Sur $]1, +\infty[$?

(c) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est intégrable sur $]0, e[$ et calculer sa norme dans l'espace des fonctions intégrables sur $]0, e[$.

(d) Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \ln\left|\frac{x + 1}{x - 1}\right|$$

est intégrable et de carré intégrable sur $]0, 1[$. Montrer également qu'elle est de carré intégrable mais pas intégrable sur $]1, +\infty[$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = \sin^2(x)$. Calculer si possible les normes $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ de f

Exercice 3. On définit les fonctions f et g sur $[0, \pi]$ par

$$f(x) = e^{ix} \qquad \text{et} \qquad g(x) = e^{-ix}.$$

(a) Déterminer si possible les normes $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ de f et g.

(b) Calculer $\langle f, 2ig \rangle$.

(c) Prouver que $f + ig$ et $g + if$ sont orthogonaux.

Exercice 4. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{1}{m}\chi_{[-m,m]}(x), \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, déterminer si la fonction f_m est continue, intégrable, de carré intégrable, bornée et en calculer les normes correspondantes.

(b) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Etudier la convergence de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ pour chacune des normes $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.

Exercice 5. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = m^{3/2} x e^{-mx}, \quad x \in [0, +\infty[.$$

(a) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, déterminer si la fonction f_m est continue, intégrable, de carré intégrable, bornée et en calculer les normes correspondantes.

(b) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ sur $[0, +\infty[$.

(c) Etudier la convergence de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ pour chacune des normes $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.

Exercice 6. On donne la suite de fonctions f_m suivante

$$f_m(x) = \frac{\sqrt{m}}{1+m^2x^2}, \quad m \in \mathbb{N}_0 \,.$$

(a) Déterminer l'ensemble A sur lequel cette suite converge ponctuellement, ainsi que sa limite.

(b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur A et sur les ensembles bornés fermés inclus dans A.

(c) Etudier la convergence de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ pour chacune des normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$.

Exercice 7. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_m(x) = e^{-2x}\,\frac{x^m}{m!}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Calculer (si possible), pour tout $m \in \mathbb{N}$, les normes $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ de f_m sur $[0,+\infty[$.

(b) Pour tout $M \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_M = \sum_{m=0}^{M} f_m.$$

(1) Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(F_M)_{M\in\mathbb{N}}$ sur $[0,+\infty[$ ainsi que la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ et sur tout compact de $[0,+\infty[$.

(2) Etudier la convergence de la suite $(F_M)_{M\in\mathbb{N}}$ pour les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur $[0,+\infty[$.

Exercice 8. Soit $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel complexe et $\|.\|$ sa norme associée. Démontrer que l'on a les égalités suivantes :

(a) $\|f\|^2 + \|g\|^2 = \frac{\|f+g\|^2+\|f-g\|^2}{2}$.

(b) $\langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle = \frac{\|f+g\|^2-\|f-g\|^2}{2}$.

(c) $\langle f,g\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k\|f+i^kg\|^2$.

Exercice 9. Montrer que, pour tous $x,y>0$, on a

$$\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{\Gamma(x)\Gamma(y)}.$$

Exercice 10. Montrer que, quel que soit le réel t strictement positif, on a

$$(D\Gamma(t))^2 \leq \Gamma(t)(D^2\Gamma)(t).$$

— Autres exercices —

Exercice 11. Soit E une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$.

(a) Si $f_m \to f$ pour $\|.\|_1$ et $g_m \to g$ pour $\|.\|_\infty$, montrer que $f_mg_m \to fg$ pour $\|.\|_1$.

(b) Si $f_m \to f$ pour $\|.\|_2$ et $g_m \to g$ pour $\|.\|_2$, montrer que $f_mg_m \to fg$ pour $\|.\|_1$.

Exercice 12. Soient $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a<b$. Si $f \in \mathrm{C}_0([a,b]) \cap \mathrm{C}_1(]a,b[)$ et si Df est continue et de carré intégrable sur $]a,b[$, démontrer que

$$|f(b)-f(a)|^2 \leq (b-a)\|Df\|_2^2.$$

Exercice 13. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Examiner la convergence ponctuelle et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(b) Les fonctions δ_n sont-elles continues, intégrables, de carré intégrable, bornées sur $\mathbb{R}$? Si c'est le cas, examiner la convergence de la suite pour les normes correspondantes.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a
$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\, dx = 1.$$

(d) Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0)$$
pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (i.e. pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_\infty(\mathbb{R})$ à support compact dans $\mathbb{R}$).

Exercice 14. Soient $r > 0$ et f une fonction continue et de carré intégrable sur $]0, r[$. Démontrer que
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)dt = 0.$$
Si f est continue et de carré intégrable sur $]0, +\infty[$, démontrer alors que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)dt = 0.$$

Analyse II

Année académique 2021-2022
2^{e} Bloc Physique

5. Produit de convolution

— Exercices de base —

Exercice 1. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) Calculer si possible le produit de convolution de f et g.

(b) Représenter le graphique des fonctions f, g et $f \star g$.

Exercice 2. (a) Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x \chi_{[1,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = x\chi_{[-1,+\infty[}(x).$$

Montrer que le produit de convolution $f \star g$ est défini sur $\mathbb{R}$ et donner sa valeur en tout point de $\mathbb{R}$.

(b) Même question si

$$f(x) = |x| \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

(c) Même question si

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-|x|}.$$

Exercice 3. Soit l'échelon de Heaviside $Y = \chi_{]0,+\infty[}$. Pour tous $m \in \mathbb{N}_0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose

$$Y_\lambda^{(m)}(x) = \frac{e^{\lambda x} x^{m-1}}{\Gamma(m)} Y(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que, pour $m, n \in \mathbb{N}_0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$Y_\lambda^{(m+n)} = Y_\lambda^{(m)} \star Y_\lambda^{(n)}.$$

Exercice 4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Si on pose

$$f(x) = e^{-ax}\chi_{[0,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-bx}\chi_{[0,+\infty[}(x),$$

montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{(f \star g)(x)}{x}\, dx = \frac{\ln(b/a)}{b-a}.$$

Exercice 5. Calculer si possible $\chi_A \star \chi_B$ lorsque

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\} \quad \text{et} \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1\}.$$

Exercice 6. Pour $k \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$e_k(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\chi_{]0,+\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que

$$D^n(e_m \star \varphi) = e_{m-n} \star \varphi \quad \text{et} \quad D^k(e_k \star \varphi) = \varphi$$

pour tous $n, m, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $m > n$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

— Autres exercices —

Exercice 7. Soit $f \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$. Posons

$$h(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt, \quad x \geq 0.$$

Montrer que la fonction h est définie et continue sur $[0,+\infty[$ et que l'on a

$$\lim_{x\to+\infty} e^x h(x) = 0.$$

Exercice 8. Soit $a \in]0,+\infty[$ et H_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H_a(x) = \frac{1}{a}\chi_{]0,a[}.$$

Soit $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$ une suite de nombres strictement positifs tel que $a = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ converge. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$u_k = H_{a_0} \star \ldots \star H_{a_k}.$$

Il est demandé de prouver que

(a) Pour tout $k \geqslant 1$, $u_k \in C^{k-1}(\mathbb{R})$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{supp}(u_k) \subset [0,a]$.

(c) La suite u_k converge vers une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}(u) \subset [0,a]$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} u(x)dx = 1$.

(d) On a les inégalités

$$\sup_{x\in[0,a]} |(D^k u)(x)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |(D^{k+1}u)(x)|dx \leqslant \frac{2^k}{a_0 \ldots a_k},$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 (Critère d'annulation** *pp).** Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Montrer que $f = 0$ *pp* dans Ω si et seulement si

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx = 0$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.