Analyse II Année académique 2021-2022
2e Bloc Physique

6. Transformation de Fourier de fonctions intégrables

Exercice 1. Soit $a > 0$. Calculer (si possible) la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

(1) $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ix} e^{-x} \chi_{[0,+\infty[}(x)$
(2) $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto x e^{-x^2}$
(3) $f_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto (1 - a|x|)\chi_{[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}]}(x)$
(4) $f_4 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-|x-1|}$
(5) $f_5 : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(2x)\chi_{[-1,1]}(x)$.

Exercice 2. (1) Calculer (si possible) la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-\lambda|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$) où λ est une constante strictement positive.

(2) Pour tout $\lambda > 0$, on pose
$$R_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\pi(x^2 + \lambda^2)}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$
Montrer que, pour tous $a, b > 0$, on a $R_a \star R_b = R_{a+b}$.

(3) Montrer de deux façons différentes (la première de manière directe, la deuxième en utilisant les points (1) et (2)) que, pour tous $a, b > 0$, on a
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2ab}\frac{1}{a+b}.$$

Exercice 3. Montrer que la transformée de Fourier d'une fonction paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire). Qu'en est-il de la réciproque ?

Exercice 4. Soient $a, b > 0$. Si possible, calculer

(1)
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}\, dx$$
(2)
$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(ax)\cos(bx)}{x}\, dx$$
(3)
$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x}\, dx, \quad a \neq b.$$
.

(Rappel : Pour tout $\lambda > 0$, on a $\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x} = \frac{\pi}{2}$.)

Exercice 5. En utilisant le théorème du transfert, calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \sin(x)\, dx.$$

Exercice 6. Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie par
$$f(x) = (1 + x)\chi_{[-1,0]}(x) + (1 - x)\chi_{[0,1]}(x).$$
En déduire la valeur de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(x)}{x^4}.$$

Exercice 7. Soit un signal f (on suppose que cette fonction est intégrable et de carré intégrable). On définit l'autocorrélation du signal par

$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-t)}\, dx, \quad t \in \mathbb{R}$$

et la densité spectrale de puissance de ce signal (PSD) par

$$D_f(y) = \left|\mathcal{F}_y^- f\right|^2, \quad y \in \mathbb{R}\,.$$

On pose $f^s(x) = \overline{f(-x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que l'autocorrélation s'écrit $E_f = f \star f^s$.

(2) Montrer que l'autocorrélation d'une fonction à valeurs réelles est une fonction paire.

(3) Montrer que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0).$$

(4) Montrer que la densité spectrale et l'autocorrélation sont liées par la transformation de Fourier (l'une est la transformée de l'autre).

— Autres exercices —

Exercice 8 (Equation de la chaleur). Considérons une barre mince infinie de métal de conductivité constante γ et de chaleur spécifique volumique constante C. Si U la température en x au temps t, on a l'équation

$$D_t U = \frac{\gamma}{C} D_x^2 U.$$

Le but de l'exercice est de résoudre cette équation aux dérivées partielles sous les conditions suivantes :

(1) Les fonctions U, D_tU, D_xU et D_x^2U sont continues sur $\mathbb{R}\,\times]0,+\infty[$ et intégrables en x sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in]0,+\infty[$ fixé.

(2) On a une condition initiale $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{t\to 0^+} U(x,t) = f(x).$$

(La convergence est dans $L^1(\mathbb{R})$.)

(3) Pour tout intervalle compact $[t_0, t_1]$ de $]0,+\infty[$, il existe une fonction $F \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$|D_tU(x,t)| \leq F(x) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Exercice 9. Démontrer que 0 est la seule fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$ telle que $f \star f = f$.

7. Transformation de Fourier de fonctions de carré intégrable

Exercice 1. Si possible, déterminer la transformée de Fourier des fonctions f, g et h définies par

(1) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2/2}$,

(2) $g : x \in \mathbb{R}_0 \mapsto \operatorname{sign}(x)\frac{\sin(x)}{x}$,

(3) $h : x \in \mathbb{R}_0 \mapsto \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Préciser à chaque fois s'il s'agit d'une transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Si $a > 0$ établir que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(a)}{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\sin(a).$$

Exercice 3. On donne les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x + i}.$$

Déterminer la transformée de Fourier de f et de g. Préciser s'il s'agit d'une transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Si f et g sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que

$$\mathcal{F}^+\left(\mathbb{F}^- f \,.\, \mathbb{F}^- g\right) = (2\pi)^n\, f \star g \quad \text{sur } \mathbb{R}\,.$$

8. Séries trigonométriques de Fourier

— Exercices de base —

Exercice 1. Soit E l'ensemble des polynomes complexes de degré plus petit ou égal à 2.

(1) Montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

(2) Si $P, Q \in E$, on définit

$$\langle P, Q\rangle = P(0)\overline{Q(0)} + P(1)\overline{Q(1)} + P(i)\overline{Q(i)}.$$

Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

(3) A quelles conditions sur $a, b, c \in \mathbb{C}$ l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définie par

$$\langle P, Q\rangle = P(a)\overline{Q(a)} + P(b)\overline{Q(b)} + P(c)\overline{Q(c)},$$

pour tout $P, Q \in E$, est-elle un produit scalaire sur E ?

Exercice 2. Posons $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, posons

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

Le polynome P_n est appelé polynome de Legendre de degré n.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver que P_n est effectivement un polynome de degré n.

(2) Démontrer la formule de Rodrigues

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n \left((x^2 - 1)^n\right).$$

(3) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que le polynome P_n est une solution particulière de l'équation différentielle

$$D((1 - x^2)Df(x)) + n(n + 1)f(x) = 0.$$

(4) En déduire que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale dans $L^2([-1, 1])$.

Exercice 3. On considère l'espace de Hilbert $L^2([0, 1])$.

(1) Montrer que les fonctions f et g définies par $f(x) = \cos(2\pi x)$ et $g(x) = e^{4i\pi x}$ y sont orthogonales.

(2) Développer les fonctions g_1, g_2, g_3 en série trigonométrique de Fourier dans cet espace, en exprimant la réponse finale à l'aide de fonction sinus et cosinus et en simplifiant au maximum l'expression.

$$g_1(x) = \cos(10\pi x), \quad g_2(x) = \cos^4(\pi x), \quad g_3(x) = \cos(\pi x).$$

(3) En déduire que

$$\frac{\sqrt{2}}{16}\pi = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{2m - 1}{16m^2 - 16m + 3}.$$

Exercice 4. On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \,]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in \,]0, \pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

(1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de f sur $[-\pi, \pi]$.
(2) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

Exercice 5. (1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction f donnée par $f(x) = |\sin(x)|$, $x \in \mathbb{R}$.
(2) Déterminer la somme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2 - 1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2 - 1}.$$

Exercice 6. (1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier sur $[-\pi, \pi]$ de la fonction f donnée par $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
(2) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m^2+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2+1}.$$

— Autres exercices —

Exercice 7 (Noyau de Poisson). Pour tout $r \in [0, 1[$, on pose

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on pose aussi $e_m(x) = e^{imx}$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) Pour tous $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que

$$P_r(\theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} e_m(\theta).$$

(2) Pour tout $r \in [0, 1[$, calculer (si possible) la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\, d\theta.$$

(3) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2π. Montrer que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} \, \langle f, e_m \rangle \, e_m(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P_r(\theta - t)\, dt$$

pour tous $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. En déduire que

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} \, \langle f, e_m \rangle \, e_m(\theta) = f(\theta)$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 ***(Formule sommatoire de Poisson).*** Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $x \mapsto x^2 f(x)$ soit borné sur $\mathbb{R}$. Démontrer que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}^-_{2\pi m} f)\, e^{2i\pi m x}$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$