

4. Espaces normés et convergences liés à l'intégration

— Exercices de base —

Exercice 1. (a) Soit $\alpha > 0$ et soit la fonction f définie pour tout $x > 0$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x^\alpha)}{1 + x^{2\alpha}}.$$

Pour quelles valeurs de α cette fonction est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

- (b) La fonction f définie par $f(x) = \ln|x-1|$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ est-elle intégrable sur $]0, 1[$? Sur $]1, +\infty[$?
- (c) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est intégrable sur $]0, e[$ et calculer sa norme dans l'espace des fonctions intégrables sur $]0, e[$.
- (d) Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

est intégrable et de carré intégrable sur $]0, 1[$. Montrer également qu'elle est de carré intégrable mais pas intégrable sur $]1, +\infty[$.**Exercice 2.** Soit f la fonction définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = \sin^2(x)$. Calculer si possible les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de f **Exercice 3.** On définit les fonctions f et g sur $[0, \pi]$ par

$$f(x) = e^{ix} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-ix}.$$

- (a) Déterminer si possible les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de f et g .
- (b) Calculer $\langle f, 2ig \rangle$.
- (c) Prouver que $f + ig$ et $g + if$ sont orthogonaux.

Exercice 4. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{1}{m} \chi_{[-m, m]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, déterminer si la fonction f_m est continue, intégrable, de carré intégrable, bornée et en calculer les normes correspondantes.
- (b) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur $\mathbb{R}$.
- (c) Etudier la convergence de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ pour chacune des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 5. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = m^{3/2} x e^{-mx}, \quad x \in [0, +\infty[.$$

- (a) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, déterminer si la fonction f_m est continue, intégrable, de carré intégrable, bornée et en calculer les normes correspondantes.
- (b) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur $[0, +\infty[$.
- (c) Etudier la convergence de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ pour chacune des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 6. On donne la suite de fonctions f_m suivante

$$f_m(x) = \frac{\sqrt{m}}{1 + m^2 x^2}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

- (a) Déterminer l'ensemble A sur lequel cette suite converge ponctuellement, ainsi que sa limite.
- (b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur A et sur les ensembles bornés fermés inclus dans A .
- (c) Etudier la convergence de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ pour chacune des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 7. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_m(x) = e^{-2x} \frac{x^m}{m!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Calculer (si possible), pour tout $m \in \mathbb{N}$, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de f_m sur $[0, +\infty[$.
- (b) Pour tout $M \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_M = \sum_{m=0}^M f_m.$$

- (1) Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(F_M)_{M \in \mathbb{N}}$ sur $[0, +\infty[$ ainsi que la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ et sur tout compact de $[0, +\infty[$.
- (2) Etudier la convergence de la suite $(F_M)_{M \in \mathbb{N}}$ pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 8. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel complexe et $\|\cdot\|$ sa norme associée. Démontrer que l'on a les égalités suivantes :

- (a) $\|f\|^2 + \|g\|^2 = \frac{\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2}{2}.$
- (b) $\langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle = \frac{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2}{2}.$
- (c) $\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|f + i^k g\|^2.$

Exercice 9. Montrer que, pour tous $x, y > 0$, on a

$$\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{\Gamma(x)\Gamma(y)}.$$

Exercice 10. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à une intégrale bien choisie, montrer que

$$\sqrt{3} \ln(3) < 2.$$

— Autres exercices —

Exercice 11. Soit E une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$.

- (a) Si $f_m \rightarrow f$ pour $\|\cdot\|_1$ et $g_m \rightarrow g$ pour $\|\cdot\|_\infty$, montrer que $f_m g_m \rightarrow fg$ pour $\|\cdot\|_1$.
- (b) Si $f_m \rightarrow f$ pour $\|\cdot\|_2$ et $g_m \rightarrow g$ pour $\|\cdot\|_2$, montrer que $f_m g_m \rightarrow fg$ pour $\|\cdot\|_1$.

Exercice 12. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Si $f \in C_0([a, b]) \cap C_1(]a, b[)$ et si Df est continue et de carré intégrable sur $]a, b[$, démontrer que

$$|f(b) - f(a)|^2 \leq (b - a) \|Df\|_2^2.$$

Exercice 13. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2 x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Examiner la convergence ponctuelle et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

- (b) Les fonctions δ_n sont-elles continues, intégrables, de carré intégrable, bornées sur $\mathbb{R}$? Si c'est le cas, examiner la convergence de la suite pour les normes correspondantes.
- (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x) dx = 1.$$

- (d) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_n(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (i.e. pour tout $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R})$ à support compact dans $\mathbb{R}$).

Exercice 14. Soient $r > 0$ et f une fonction continue et de carré intégrable sur $]0, r[$. Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t) dt = 0.$$

Si f est continue et de carré intégrable sur $]0, +\infty[$, démontrer alors que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t) dt = 0.$$