7. Transformation de Fourier de fonctions de carré intégrable

Exercice 1. Si possible, déterminer la transformée de Fourier des fonctions f, g et h définies par

(1) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2/2}$,

(2) $g : x \in \mathbb{R}_0 \mapsto \operatorname{sign}(x)\frac{\sin(x)}{x}$,

(3) $h : x \in \mathbb{R}_0 \mapsto \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Préciser à chaque fois s'il s'agit d'une transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Si $a > 0$ établir que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(a)}{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\sin(a).$$

Exercice 3. On donne les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x + i}.$$

Déterminer la transformée de Fourier de f et de g. Préciser s'il s'agit d'une transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Si f et g sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que

$$\mathcal{F}^+\left(\mathbb{F}^- f \,.\, \mathbb{F}^- g\right) = (2\pi)^n\, f \star g \quad \text{sur } \mathbb{R}\,.$$