2. Intégrales eulériennes

— Exercices de base —

Exercice 1. Calculer si possible les limites

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{(m!)^{\frac{1}{m}}}{m} \qquad \text{et} \qquad \lim_{m\to+\infty}\left(\frac{\ln(m!)}{m}-\ln(m)\right).$$

Exercice 2. Exprimer $\Gamma(5/6)$ en fonction de $\Gamma(1/6)$.

Exercice 3. Etablir que pour tous $m>0, n>-1, a>0$, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^m}x^n dx = \frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right)a^{-\frac{n+1}{m}}.$$

Exercice 4. Pour tout $x>1$, on pose

$$\zeta(x)=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^x}.$$

Montrer que, pour tout $x>1$, on a

$$\zeta(x)\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}\,dt.$$

Exercice 5. Montrer que la mesure d'une boule de $\mathbb{R}^n$ de rayon $r>0$ est donnée par la formule

$$\omega_n(r)=\frac{\pi^{n/2}r^n}{\Gamma(n/2+1)}.$$

En déduire que $\omega_n(r)\to 0$ si $n\to+\infty$.

— Autres exercices —

Exercice 6. Prouver que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^2 2^k}{(2k+1)!}$$

converge absolument et montrer que sa limite est égale à $\pi/2$.

Exercice 7 (Définition de Gauss de Γ). Démontrer que pour tout $x>0$, on a

$$\Gamma(x)=\lim_{m\to+\infty}\frac{m^x\,m!}{x(x+1)\dots(x+m)}.$$

Exercice 8. Prouver que

$$\int_0^1 \ln(\Gamma(x))\sin(\pi x)\,dx=\frac{1+\ln(\pi/2)}{\pi}.$$

F. Bastin & C. Dubussy – 26 août 2019