

Travail dirigé 1

Exercice 1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- (a) La fonction $x \mapsto e^{-i\pi x^2}$ est de carré intégrable sur \mathbb{R} .
- (b) Si celui-ci existe, le produit de convolution de deux fonctions impaires est impair.
- (c) Si une suite de fonctions converge sur $[0, 1]$ pour la norme $\|\cdot\|_2$, elle converge aussi sur $[0, 1]$ pour la norme $\|\cdot\|_1$.
- (d) Il existe une fonction bornée (non identiquement nulle) sur $[0, 1]$ telle que ses normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont égales.

Exercice 2. (a) Calculer la valeur de $\Gamma(7/2)$ et de $B(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

- (b) Pour quelles valeurs des réels α et β les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto (1-x)^\beta$ sont-elles de carré intégrable sur $]0, 1[$? Pour ces valeurs, montrer l'inégalité

$$B(\alpha + 1, \beta + 1) \leq \frac{1}{\sqrt{(1 + 2\alpha)(1 + 2\beta)}}.$$

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 0[\\ \sqrt{1 - nx} & \text{si } x \in [0, 1/n[\\ 0 & \text{si } x \in [1/n, 1] \end{cases}.$$

- (a) Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sur $[-1, 1]$.
- (b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur $[-1, 1]$, sur $[-1, 0]$, sur $]0, 1]$ et sur les fermés bornés inclus dans $]0, 1]$.
- (c) Etudier la convergence de cette suite sur $[-1, 1]$ pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-n \frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Pour quelles valeurs de α la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ converge-t-elle (1) ponctuellement sur \mathbb{R} , (2) uniformément sur \mathbb{R} , (3) uniformément sur tout compact de \mathbb{R}_0 , (4) sur \mathbb{R} pour $\|\cdot\|_1$, (5) sur \mathbb{R} pour $\|\cdot\|_2$?
- (b) Dans la suite, on suppose que $\alpha = 1$.
(1) Montrer que la fonction

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

est définie sur \mathbb{R} et continue sur \mathbb{R}_0 .

- (2) Calculer $S(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_0$. En déduire que la fonction S n'est pas continue en 0.

Exercice 5. La densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne d'écart-type $\sigma > 0$ est donnée par la fonction G_σ définie par

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Vérifier que

$$\int_{\mathbb{R}} G_\sigma(x) dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} x G_\sigma(x) dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 G_\sigma(x) dx = \sigma^2.$$

- (b) Pour tous $\sigma, \tau > 0$, établir que $G_\sigma \star G_\tau = G_{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}$ sur \mathbb{R} .