

**Travail dirigé 1**

**Exercice 1.** Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- (a) La fonction  $x \mapsto e^{-i\pi x^2}$  est de carré intégrable sur  $\mathbb{R}$ .
- (b) Si celui-ci existe, le produit de convolution de deux fonctions impaires est impair.
- (c) Si une suite de fonctions converge sur  $[0, 1]$  pour la norme  $\|\cdot\|_2$ , elle converge aussi sur  $[0, 1]$  pour la norme  $\|\cdot\|_1$ .
- (d) Il existe une fonction bornée (non identiquement nulle) sur  $[0, 1]$  telle que ses normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont égales.

**Exercice 2.** (a) Calculer la valeur de  $\Gamma(7/2)$  et de  $B(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ .

- (b) Pour quelles valeurs des réels  $\alpha$  et  $\beta$  les fonctions  $x \mapsto x^\alpha$  et  $x \mapsto (1-x)^\beta$  sont-elles de carré intégrable sur  $]0, 1[$  ? Pour ces valeurs, montrer l'inégalité

$$B(\alpha + 1, \beta + 1) \leq \frac{1}{\sqrt{(1 + 2\alpha)(1 + 2\beta)}}.$$

**Exercice 3.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ , on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 0[ \\ \sqrt{1 - nx} & \text{si } x \in [0, 1/n[ \\ 0 & \text{si } x \in [1/n, 1] \end{cases}.$$

- (a) Etudier la convergence ponctuelle de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  sur  $[-1, 1]$ .
- (b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur  $[-1, 1]$ , sur  $[-1, 0]$ , sur  $]0, 1]$  et sur les fermés bornés inclus dans  $]0, 1]$ .
- (c) Etudier la convergence de cette suite sur  $[-1, 1]$  pour les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$ .

**Exercice 4.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ , on pose

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-n \frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  converge-t-elle (1) ponctuellement sur  $\mathbb{R}$ , (2) uniformément sur  $\mathbb{R}$ , (3) uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}_0$ , (4) sur  $\mathbb{R}$  pour  $\|\cdot\|_1$ , (5) sur  $\mathbb{R}$  pour  $\|\cdot\|_2$  ?
- (b) Dans la suite, on suppose que  $\alpha = 1$ .  
(1) Montrer que la fonction

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

est définie sur  $\mathbb{R}$  et continue sur  $\mathbb{R}_0$ .

- (2) Calculer  $S(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_0$ . En déduire que la fonction  $S$  n'est pas continue en 0.

**Exercice 5.** La densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne d'écart-type  $\sigma > 0$  est donnée par la fonction  $G_\sigma$  définie par

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Vérifier que

$$\int_{\mathbb{R}} G_\sigma(x) dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} x G_\sigma(x) dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 G_\sigma(x) dx = \sigma^2.$$

- (b) Pour tous  $\sigma, \tau > 0$ , établir que  $G_\sigma \star G_\tau = G_{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}$  sur  $\mathbb{R}$ .