

1. Révisions

— Exercices de base —

Exercice 1. Soit a un paramètre réel. Etudier la convergence de la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ définie par

$$(1) x_m = 2^m a^m \quad (2) x_m = \frac{m^2 + 2}{m^2 + m + 1} a^m \quad (3) x_m = \sum_{k=0}^m \frac{a}{(m+k)^2} \quad (4) x_m = \frac{a^{\ln(m)}}{m^a}.$$

Exercice 2. Etudier la convergence des séries suivantes :

$$(1) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k^2)}{k^2} \quad (2) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k+3}{k^2-1} \quad (3) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{k^2+1}{k^3+1} \quad (4) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{\sqrt[3]{k}}.$$

Exercice 3. Si l'intégrale suivante a un sens, en déterminer la valeur.

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{2-t}} dt$$

Exercice 4. (1) Pour quelles valeurs du paramètre réel α , la fonction

$$x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x^\alpha}$$

est-elle intégrable sur $]0, 1[$?

(2) Pour quelles valeurs du paramètre réel β , la fonction

$$x \mapsto x^\beta (e^{-x} - 1)$$

est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 5. Calculer si possible les intégrales suivantes :

$$(1) \int_0^{\pi/4} \sin(x) \cos(3x) dx \quad (2) \int_{-\infty}^0 e^{ix} dx \quad (3) \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}.$$

Exercice 6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer si possible les intégrales suivantes :

$$(1) \int_0^1 \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha} \\ (2) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} \\ (3) \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$$

Exercice 7. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Étudier l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$ de

$$(1) f_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{1+x}; \\ (2) g_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{1+x^2}; \\ (3) h_{\alpha,\beta} = \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}.$$

Exercice 8. Déterminer la condition nécessaire et suffisante sur le paramètre réel non nul α pour que la fonction

$$f_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{1+x^{\alpha^2}}, \quad x \in]0, +\infty[$$

(1.1) soit intégrable en 0.

(1.2) soit intégrable en $+\infty$.

Exercice 9. Les intégrales suivantes ont-elles un sens ?

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

(2) $\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{x} dx$

(3) $\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^\alpha} dx$

(4) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$

Exercice 10. Si possible, calculer les intégrales suivantes :

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx \quad (a > 0)$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$

(3) $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$

Exercice 11. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

(Suggestion : calculer son carré)

Exercice 12. Calculer si possible les intégrales suivantes :

(1) $\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln(x)} dx$ pour tous $a, b > 1$,

(2) $\int_0^{+\infty} e^{-bx} \frac{\sin(ax)}{x} dx$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$,

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-x}}{x} dx$ pour tout $a > 0$.

Exercice 13. On pose, pour $a > -1$,

$$F(a) = \int_0^1 \frac{x^a - 1}{\ln x} dx.$$

(1) Montrer que F est bien définie.

(2) Montrer que F est dérivable sur $(-1, +\infty)$ et calculer $F'(a)$.

(3) En déduire une expression explicite de $F(a)$.

Exercice 14. Pour $a > 0$, on définit

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} \sin x}{x} dx.$$

(1) Montrer que I est bien définie.

(2) Montrer que I est dérivable sur $(0, +\infty)$ et calculer $I'(a)$.

(3) En déduire une expression explicite de $I(a)$.

Exercice 15. (1) Soit $\Omega =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Montrer que la fonction f définie par

$$f(x, y) = \frac{1}{(1+y)(1+yx^2)}$$

est intégrable sur Ω et calculer son intégrale.

(2) En déduire que la fonction

$$x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$ et la valeur de son intégrale.

— Exercices de dépassement —

Exercice 16. Montrer que pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

2. Intégrales eulériennes

— Exercices de base —

Exercice 1. Calculer si possible les limites

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(m!)^{\frac{1}{m}}}{m} \quad \text{et} \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(m!)}{m} - \ln(m) \right).$$

Exercice 2. Exprimer $\Gamma(5/6)$ en fonction de $\Gamma(1/6)$.

Exercice 3. Etablir que pour tous $m > 0, n > -1, a > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^m} x^n dx = \frac{1}{m} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) a^{-\frac{n+1}{m}}.$$

Exercice 4. Montrer que

$$B(m, n) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$$

quelque soient $m, n > -1$.

Exercice 5. Montrer que

$$B(m, n) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}(x) \cos^{2n-1}(x) dx$$

quelque soient $m, n > -1$.

Exercice 6. Montrer que

$$\int_0^1 \ln(\Gamma(x)) dx = \ln(\sqrt{2\pi}),$$

on supposera connu que

$$\int_0^1 \ln(\sin(\pi x)) dx.$$

Exercice 7. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 8. Pour tout $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^x}.$$

Montrer que, pour tout $x > 1$, on a

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt.$$

Exercice 9. Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^\alpha(x) dx = \frac{\pi}{2 \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}$$

pour tous les réels α pour lesquels l'intégrale a du sens.

— Exercices de dépassement —

Exercice 10. Montrer que la mesure d'une boule de $\mathbb{R}^n$ de rayon $r > 0$ est donnée par la formule

$$\omega_n(r) = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma(n/2 + 1)}.$$

En déduire que $\omega_n(r) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 11. Prouver que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2 2^k}{(2k+1)!}$$

converge absolument et montrer que sa limite est égale à $\pi/2$.

Exercice 12 (Définition de Gauss de Γ). Démontrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m^x m!}{x(x+1)\dots(x+m)}.$$

Exercice 13. Prouver que

$$\int_0^1 \ln(\Gamma(x)) \sin(\pi x) dx = \frac{1 + \ln(\pi/2)}{\pi}.$$

3. Convergences ponctuelle et uniforme

— Exercices de base —

Exercice 1. Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme (sur $\mathbb{R}$) des suites $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$(a) f_m(x) = \chi_{[-m, m]}(x) \quad (b) f_m(x) = m\chi_{[-m, m]}(x) \quad (c) f_m(x) = mx\chi_{[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]}(x).$$

Exercice 2. (a) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_m(x) = \frac{m^2 x}{1 + m^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$ ainsi que la convergence uniforme de $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$, sur $]0, +\infty[$, et sur les compacts de $]0, +\infty[$.

(b) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{x}{m}\chi_{[0, m]}(x) + (m+1-x)\chi_{]m, m+1]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur $\mathbb{R}$ ainsi que la convergence uniforme de $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur $\mathbb{R}$ et sur les intervalles $] -\infty, r]$ avec $r > 0$.

(c) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_m(x) = me^{-m^2 x}.$$

Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur $]0, +\infty[$ ainsi que la convergence uniforme de $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur $]0, +\infty[$ et sur les compacts de $]0, +\infty[$.

Exercice 3. Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme (sur $\mathbb{R}$) des suites $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f_m^{(1)}(x) &= \frac{1}{m}\chi_{[1/m, 2/m]}(x) & f_m^{(4)}(x) &= m^2 x \chi_{]0, 1/m]}(x) \\ f_m^{(2)}(x) &= \chi_{[1/m, 2/m]}(x) & f_m^{(5)}(x) &= m^2 x \chi_{]0, 1/m]}(x) + (2m - m^2 x) \chi_{]1/m, 2/m]}(x) \\ f_m^{(3)}(x) &= \frac{1}{1 + mx^2} & f_m^{(6)}(x) &= m^2 x e^{-m(x-1/m)} \chi_{[0, +\infty[} \end{aligned}$$

Exercice 4. (1) On donne la suite de fonctions

$$f_m(x) = \frac{x^m}{1 + x^{2m}}, \quad x \geq 0.$$

Étudier la convergence ponctuelle de cette suite, ainsi que la convergence uniforme sur tout intervalle fermé borné inclus dans $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$.

(2) On donne la suite de fonctions

$$f_m(x) = \frac{x^{2m}}{1 + x^m}, \quad x \geq 0.$$

Déterminer l'ensemble des réels dans lequel on a la convergence ponctuelle. Et qu'en est-il de la convergence uniforme ?

(3) Étudier la convergence ponctuelle et uniforme des suites suivantes, données explicitement :

$$f_m(x) = mxe^{-mx}, \quad g_m(x) = mxe^{-m^2 x}.$$

- (4) Étudier la convergence ponctuelle et uniforme des suites suivantes, données explicitement, et donner l'expression explicite de la limite ponctuelle (c'est-à-dire sommer la série).

$$f_m(x) = \sum_{j=0}^m x^j, \quad g_m(x) = \sum_{j=1}^m \frac{x^j}{j}.$$

Exercice 5. Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle borné $]a, b[$ de $\mathbb{R}$. Si cette suite converge uniformément vers la fonction f sur $]a, b[$, montrer que f est intégrable sur $]a, b[$ et que

$$\int_a^b f_m(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

si $m \rightarrow +\infty$.

En déduire que

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-m} = \int_0^1 x^{-x} dx.$$

Exercice 6. Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ la suite de fonctions définies par $f_m(x) = (1 - x^2)^m$, $x \in [0, 1]$.

- (a) Étudier la convergence ponctuelle de cette suite sur $[0, 1]$.
- (b) Étudier la convergence uniforme de cette suite sur $[0, 1]$ et sur les sous-intervalles de $[0, 1]$.
- (c) Calculer la limite

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1 - x^2)^m dx.$$

Exercice 7. Étudier la convergence ponctuelle et uniforme sur $[0, 1]$ ainsi que la convergence uniforme sur les compacts de $]0, 1]$ pour les suites de fonctions suivantes :

$$f_m(x) = mx(1 - x^2)^m$$

$$g_m(x) = mx\chi_{[0, 1/m]} + \frac{m}{m-1}(1-x)\chi_{]1/m, 1]}.$$

Exercice 8. Étudier la convergence ponctuelle des suites suivantes et déterminer sur quels sous-intervalles de l'ensemble de définition la convergence est uniforme.

- (a) $f_m(x) = x/m$, $x \in \mathbb{R}$
- (b) $f_m(x) = e^{-mx}$, $x \in [0, +\infty[$
- (c) $f_m(x) = x^{-1/m}$, $x \in]0, +\infty[$
- (d) $f_m(x) = (x-1)^{1/m}$, $x \in [1, +\infty[$.

Exercice 9. Soit la suite de fonctions $(f_M)_{M \in \mathbb{N}_0}$ définies pour tout $x \in [0, +\infty[$ par

$$f_M(x) = e^{-x} \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m}{m!} x^m.$$

Soit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}$. Prouver que la suite $(f_M)_{M \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément vers f sur $[0, +\infty[$.

— Exercices de dépassement —

Exercice 10. Développer la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en série de puissances naturelles de x sur $] -1, 1[$.

Exercice 11. Posons

$$S(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m^2}.$$

- (a) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de cette série.
- (b) Où la fonction S est-elle définie, continue et dérivable ?
- (c) Etablir qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$S(x) + S(1-x) = a - \ln(x) \ln(1-x)$$

pour tout $x \in]0, 1[$.

- (d) Montrer que

$$a = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.$$

et que

$$a - \ln(2)^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2 2^{m-1}}.$$

4. Espaces normés et convergences liés à l'intégration

— Exercices de base —

Exercice 1. (a) Soit $\alpha > 0$ et soit la fonction f définie pour tout $x > 0$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x^\alpha)}{1 + x^{2\alpha}}.$$

Pour quelles valeurs de α cette fonction est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

- (b) La fonction f définie par $f(x) = \ln|x-1|$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ est-elle intégrable sur $]0, 1[$? Sur $]1, +\infty[$?
- (c) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est intégrable sur $]0, e[$ et calculer sa norme dans l'espace des fonctions intégrables sur $]0, e[$.
- (d) Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

est intégrable et de carré intégrable sur $]0, 1[$. Montrer également qu'elle est de carré intégrable mais pas intégrable sur $]1, +\infty[$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = \sin^2(x)$. Calculer si possible les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de f

Exercice 3. On définit les fonctions f et g sur $[0, \pi]$ par

$$f(x) = e^{ix} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-ix}.$$

- (a) Déterminer si possible les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de f et g .
- (b) Calculer $\langle f, 2ig \rangle$.
- (c) Prouver que $f + ig$ et $g + if$ sont orthogonaux.

Exercice 4. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{1}{m} \chi_{[-m, m]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, déterminer si la fonction f_m est continue, intégrable, de carré intégrable, bornée et en calculer les normes correspondantes.
- (b) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur $\mathbb{R}$.
- (c) Etudier la convergence de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ pour chacune des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 5. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = m^{3/2} x e^{-mx}, \quad x \in [0, +\infty[.$$

- (a) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, déterminer si la fonction f_m est continue, intégrable, de carré intégrable, bornée et en calculer les normes correspondantes.
- (b) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sur $[0, +\infty[$.
- (c) Etudier la convergence de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ pour chacune des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 6. On donne la suite de fonctions f_m suivante

$$f_m(x) = \frac{\sqrt{m}}{1 + m^2 x^2}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

- (a) Déterminer l'ensemble A sur lequel cette suite converge ponctuellement, ainsi que sa limite.
- (b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur A et sur les ensembles bornés fermés inclus dans A .
- (c) Etudier la convergence de la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ pour chacune des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 7. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_m(x) = e^{-2x} \frac{x^m}{m!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Calculer (si possible), pour tout $m \in \mathbb{N}$, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de f_m sur $[0, +\infty[$.
- (b) Pour tout $M \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_M = \sum_{m=0}^M f_m.$$

- (1) Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(F_M)_{M \in \mathbb{N}}$ sur $[0, +\infty[$ ainsi que la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ et sur tout compact de $[0, +\infty[$.
- (2) Etudier la convergence de la suite $(F_M)_{M \in \mathbb{N}}$ pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 8. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel complexe et $\|\cdot\|$ sa norme associée. Démontrer que l'on a les égalités suivantes :

- (a) $\|f\|^2 + \|g\|^2 = \frac{\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2}{2}.$
- (b) $\langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle = \frac{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2}{2}.$
- (c) $\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|f + i^k g\|^2.$

Exercice 9. Montrer que, pour tous $x, y > 0$, on a

$$\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{\Gamma(x)\Gamma(y)}.$$

Exercice 10. Montrer que, quel que soit le réel t strictement positif, on a

$$(D\Gamma(t))^2 \leq \Gamma(t)(D^2\Gamma)(t).$$

Exercice 11. Démontrer que quelque soit le réel $t > 1/2$, on a

$$(\Gamma(t^2))^2 \leq \Gamma(2t-1)\Gamma(2t+3).$$

Exercice 12. Démontrer que quelque soit le réel $m > 1/2$, on a

$$(DB(m, m))^2 \leq 8B(2m-1, 2m-1).$$

— Exercices de dépassement —

Exercice 13. Soit E une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$.

- (a) Si $f_m \rightarrow f$ pour $\|\cdot\|_1$ et $g_m \rightarrow g$ pour $\|\cdot\|_\infty$, montrer que $f_m g_m \rightarrow fg$ pour $\|\cdot\|_1$.
- (b) Si $f_m \rightarrow f$ pour $\|\cdot\|_2$ et $g_m \rightarrow g$ pour $\|\cdot\|_2$, montrer que $f_m g_m \rightarrow fg$ pour $\|\cdot\|_1$.

Exercice 14. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Si $f \in C_0([a, b]) \cap C_1(]a, b[)$ et si Df est continue et de carré intégrable sur $]a, b[$, démontrer que

$$|f(b) - f(a)|^2 \leq (b - a) \|Df\|_2^2.$$

Exercice 15. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2 x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Examiner la convergence ponctuelle et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.
- (b) Les fonctions δ_n sont-elles continues, intégrables, de carré intégrable, bornées sur $\mathbb{R}$? Si c'est le cas, examiner la convergence de la suite pour les normes correspondantes.
- (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x) dx = 1.$$

- (d) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_n(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (i.e. pour tout $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R})$ à support compact dans $\mathbb{R}$).

Exercice 16. Soient $r > 0$ et f une fonction continue et de carré intégrable sur $]0, r[$. Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t) dt = 0.$$

Si f est continue et de carré intégrable sur $]0, +\infty[$, démontrer alors que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t) dt = 0.$$

5. Produit de convolution

— Exercices de base —

Exercice 1. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- (a) Calculer si possible le produit de convolution de f et g .
 (b) Représenter le graphique des fonctions f , g et $f \star g$.

Exercice 2. (a) Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x \chi_{[1, +\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = x \chi_{[-1, +\infty[}(x).$$

Montrer que le produit de convolution $f \star g$ est défini sur $\mathbb{R}$ et donner sa valeur en tout point de $\mathbb{R}$.

- (b) Même question si

$$f(x) = |x| \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

- (c) Même question si

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-|x|}.$$

Exercice 3. Soient les fonctions données explicitement par

$$f_1(x) = \cos(x), \quad f_2(x) = \sin(x) \chi_{[-\pi, \pi]}(x), \quad f_3(x) = e^{-x^2}, \quad f_4(x) = x \chi_{[0, +\infty[}(x), \quad f_5(x) = \chi_{]-\infty, 0]}(x).$$

Pour chaque couple de fonctions (f_j, f_k) , $j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, calculer si possible le produit de composition de f_j et f_k .

Exercice 4. Soit l'échelon de Heaviside $Y = \chi_{[0, +\infty[}$. Pour tous $m \in \mathbb{N}_0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose

$$Y_\lambda^{(m)}(x) = \frac{e^{\lambda x} x^{m-1}}{\Gamma(m)} Y(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que, pour $m, n \in \mathbb{N}_0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$Y_\lambda^{(m+n)} = Y_\lambda^{(m)} \star Y_\lambda^{(n)}.$$

Exercice 5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Si on pose

$$f(x) = e^{-ax} \chi_{[0, +\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-bx} \chi_{[0, +\infty[}(x),$$

montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{(f \star g)(x)}{x} dx = \frac{\ln(b/a)}{b-a}.$$

Exercice 6. Pour $k \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$e_k(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \chi_{]0, +\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que

$$D^n(e_m \star \varphi) = e_{m-n} \star \varphi \quad \text{et} \quad D^k(e_k \star \varphi) = \varphi$$

pour tous $n, m, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $m > n$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Exercice 7. Soient les fonctions f, g, h définies presque partout et qui sont telles que les produits de composition suivants existent

$$|f| \star |g|, (|f| \star |g|) \star |h|.$$

Montrer que les produits de compositions $(f \star g) \star h$ et $f \star (g \star h)$ existent et sont égaux.

Exercice 8. Soient les fonctions $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$ et $g(x) = e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que ces fonctions sont composables et en déterminer le produit de composition.

(2) En déduire que quelque soit le naturel strictement positif n , on a

$$f \star \underbrace{g \star \cdots \star g}_{n \text{ facteurs}} = f.$$

Exercice 9. Soit la fonction f donnée explicitement par $f(x) = x\chi_{]0, +\infty[}(x)$. Montrer que $f \star f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, deux fois continument dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $D^2(f \star f) = f$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Pour tout $R > 0$, on définit la moyenne radiale de f par

$$(\mathcal{M}_R f)(x) = \frac{1}{2R} \int_{x-R}^{x+R} f(y) dy.$$

Montrer que

(a) $\mathcal{M}_R f$ est continu sur $\mathbb{R}$,

(b) $\mathcal{M}_R f \in L^1(\mathbb{R})$ s'il en est de même de f et

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{M}_R f)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx,$$

(c) Si $f \in C^p(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{M}_R f \in C^p(\mathbb{R})$ et pour tout $k \leq p$, $D^k \mathcal{M}_R f = \mathcal{M}_R(D^k f)$.

— Exercices de dépassement —

Exercice 11. Calculer si possible $\chi_A \star \chi_B$ lorsque

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \text{et} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}.$$

Exercice 12. Soit $f \in L^2([0, +\infty[)$. Posons

$$h(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt, \quad x \geq 0.$$

Montrer que la fonction h est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et que l'on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x h(x) = 0.$$

Exercice 13 (Critère d'annulation pp). Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Montrer que $f = 0$ pp dans Ω si et seulement si

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = 0$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Travail dirigé 1**Exercice 1.** Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- (a) La fonction $x \mapsto e^{-i\pi x^2}$ est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.
- (b) Si celui-ci existe, le produit de convolution de deux fonctions impaires est impair.
- (c) Si une suite de fonctions converge sur $[0, 1]$ pour la norme $\|\cdot\|_2$, elle converge aussi sur $[0, 1]$ pour la norme $\|\cdot\|_1$.
- (d) Il existe une fonction bornée (non identiquement nulle) sur $[0, 1]$ telle que ses normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont égales.

Exercice 2. (a) Calculer la valeur de $\Gamma(7/2)$ et de $B(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

- (b) Pour quelles valeurs des réels α et β les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto (1-x)^\beta$ sont-elles de carré intégrable sur $]0, 1[$? Pour ces valeurs, montrer l'inégalité

$$B(\alpha + 1, \beta + 1) \leq \frac{1}{\sqrt{(1 + 2\alpha)(1 + 2\beta)}}.$$

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 0[\\ \sqrt{1 - nx} & \text{si } x \in [0, 1/n[\\ 0 & \text{si } x \in [1/n, 1] \end{cases}.$$

- (a) Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sur $[-1, 1]$.
- (b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur $[-1, 1]$, sur $[-1, 0]$, sur $]0, 1]$ et sur les fermés bornés inclus dans $]0, 1]$.
- (c) Etudier la convergence de cette suite sur $[-1, 1]$ pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 4. Soient f et g , les fonctions entièrement définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x} \text{ et } g(x) = \cos(4x)\chi_{]-\infty, 0]}.$$

Calculer si possible $f * g$.

— Exercices de dépassement —

Exercice 5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-n\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Pour quelles valeurs de α la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ converge-t-elle (1) ponctuellement sur $\mathbb{R}$, (2) uniformément sur $\mathbb{R}$, (3) uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_0$, (4) sur $\mathbb{R}$ pour $\|\cdot\|_1$, (5) sur $\mathbb{R}$ pour $\|\cdot\|_2$?
- (b) Dans la suite, on suppose que $\alpha = 1$.
 - (1) Montrer que la fonction

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}_0$.

- (2) Calculer $S(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_0$. En déduire que la fonction S n'est pas continue en 0.

Exercice 6. La densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne d'écart-type $\sigma > 0$ est donnée par la fonction G_σ définie par

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Vérifier que

$$\int_{\mathbb{R}} G_{\sigma}(x) dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} x G_{\sigma}(x) dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 G_{\sigma}(x) dx = \sigma^2.$$

(b) Pour tous $\sigma, \tau > 0$, établir que $G_{\sigma} \star G_{\tau} = G_{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}$ sur $\mathbb{R}$.

6. Transformation de Fourier de fonctions intégrables

Exercice 1. Soit $a > 0$. Calculer (si possible) la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

- (1) $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ix} e^{-x} \chi_{[0, +\infty[}(x)$
- (2) $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto x e^{-x^2}$
- (3) $f_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto (1 - a|x|) \chi_{[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]}(x)$
- (4) $f_4 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-|x-1|}$
- (5) $f_5 : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(2x) \chi_{[-1, 1]}(x)$.

Exercice 2. Déterminer si les fonctions suivantes, données explicitement, sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et si c'est le cas, en déterminer les transformées de Fourier.

- (1) $f_1(x) = \sin(\pi x) \chi_{[-1, 1]}(x)$, (4) $f_4(x) = e^{-x} \chi_{[0, +\infty[}(x)$, (7) $f_7(x) = e^{-|x-1|}$,
- (2) $f_2(x) = (\chi_{[-1, 1]} \star \chi_{[-1, 1]})(x)$, (5) $f_5(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$, (8) $f_8(x) = \cos(x) e^{-2|x|}$,
- (3) $f_3(x) = \frac{1}{1+x^2}$, (6) $f_6(x) = x e^{-2x^2}$, (9) $f_9(x) = x^2 e^{-x} \chi_{[0, +\infty[}(x)$.

Exercice 3. (1) Calculer (si possible) la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-\lambda|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$) où λ est une constante strictement positive.

- (2) Pour tout $\lambda > 0$, on pose

$$R_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\pi(x^2 + \lambda^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que, pour tous $a, b > 0$, on a $R_a \star R_b = R_{a+b}$.

- (3) Montrer de deux façons différentes (la première de manière directe, la deuxième en utilisant les points (1) et (2)) que, pour tous $a, b > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2ab} \frac{1}{a+b}.$$

Exercice 4. Montrer que la transformée de Fourier d'une fonction paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire). Qu'en est-il de la réciproque ?

Exercice 5. Soient $a, b > 0$. Si possible, calculer

- (1)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax) \sin(bx)}{x^2} dx$$

- (2)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax) \cos(bx)}{x} dx$$

- (3)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax) \sin(bx)}{x} dx, \quad a \neq b.$$

(Rappel : Pour tout $\lambda > 0$, on a $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.)

Exercice 6. En utilisant le théorème du transfert, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \sin(x) dx.$$

Exercice 7. Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie par

$$f(x) = (1+x)\chi_{[-1,0]}(x) + (1-x)\chi_{[0,1]}(x).$$

En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(x)}{x^4}.$$

Exercice 8. Soit un signal f (on suppose que cette fonction est intégrable et de carré intégrable). On définit l'autocorrélation du signal par

$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{f(x-t)} dx, \quad t \in \mathbb{R}$$

et la densité spectrale de puissance de ce signal (PSD) par

$$D_f(y) = |\mathcal{F}_y^- f|^2, \quad y \in \mathbb{R}.$$

On pose $f^s(x) = \overline{f(-x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Montrer que l'autocorrélation s'écrit $E_f = f \star f^s$.
- (2) Montrer que l'autocorrélation d'une fonction à valeurs réelles est une fonction paire.
- (3) Montrer que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0).$$

- (4) Montrer que la densité spectrale et l'autocorrélation sont liées par la transformation de Fourier (l'une est la transformée de l'autre).

Exercice 9. Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Posons $F(x) = f(a(x - x_0))$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathcal{F}_y^- F = \frac{1}{|a|} e^{-ix_0} \mathcal{F}_{y/a}^- f.$$

Exercice 10. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Démontrer les affirmations suivantes :

- (1) Si f est paire et réelle alors il en est de même de sa transformée de Fourier ;
- (2) Si f est impaire et réelle alors sa transformée de Fourier est imaginaire pure et impaire ;
- (3) Si f est paire et imaginaire pure alors il en est de même de sa transformée de Fourier ;
- (4) Si f est impaire et imaginaire pure alors sa transformée de Fourier est réelle et impaire.

— Exercices de dépassement —

Exercice 11 (Equation de la chaleur). Considérons une barre mince infinie de métal de conductivité constante γ et de chaleur spécifique volumique constante C . Si U la température en x au temps t , on a l'équation

$$D_t U = \frac{\gamma}{C} D_x^2 U.$$

Le but de l'exercice est de résoudre cette équation aux dérivées partielles sous les conditions suivantes :

- (1) Les fonctions $U, D_t U, D_x U$ et $D_x^2 U$ sont continues sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et intégrables en x sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in]0, +\infty[$ fixé.

(2) On a une condition initiale $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} U(\cdot, t) = f.$$

(La convergence est dans $L^1(\mathbb{R})$.)

(3) Pour tout intervalle compact $[t_0, t_1]$ de $]0, +\infty[$, il existe une fonction $F \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$|D_t U(x, t)| \leq F(x) \quad \forall t \in [t_0, t_1], \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 12. Démontrer que 0 est la seule fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$ telle que $f \star f = f$.

7. Transformation de Fourier de fonctions de carré intégrable

— Exercices de base —

Exercice 1. Si possible, déterminer la transformée de Fourier des fonctions f , g et h définies par

- (1) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2/2}$,
- (2) $g : x \in \mathbb{R}_0 \mapsto \operatorname{sign}(x) \frac{\sin(x)}{x}$,
- (3) $h : x \in \mathbb{R}_0 \mapsto \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Préciser à chaque fois s'il s'agit d'une transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Si possible, déterminer la transformée de Fourier des fonctions suivantes

- (1) $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^{-1} \chi_{]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}$,
- (2) $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\cos(x)}{x} \chi_{]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}$,
- (3) $f_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{x}$.

Préciser à chaque fois s'il s'agit d'une transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $b > a > 0$. Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) La fonction f est-elle intégrable ? De carré intégrable ?
- (b) Déterminer si possible la transformée de Fourier de Df .
- (c) En déduire si possible la transformée de Fourier de f .

Exercice 4. Si $a > 0$ établir que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(a)}{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{2} \sin(a).$$

Exercice 5. On donne les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x + i}.$$

Déterminer la transformée de Fourier de f et de g . Préciser s'il s'agit d'une transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 6.

- (1) Si f et g sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que

$$\mathcal{F}^+(\mathbb{F}^- f \cdot \mathbb{F}^- g) = (2\pi) f \star g \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

- (2) Soit $A \subset \mathbb{R}$, un ensemble (mesurable) borné. On pose $f = \mathbb{F}^+ \chi_A$. Calculer $f \star f$ à l'aide du premier point.
- (3) Soit $F \in L^\infty(\mathbb{R})$. Déduire du premier point qu'il existe $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $F = f \star f$ si et seulement s'il existe $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $F = \mathcal{F}^+ \varphi$.

— Exercices de dépassement —

Exercice 7. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{F}^+ f \in L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 8. (1) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\mathbb{F}_x^+ f \neq 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $g \in L^2(\mathbb{R})$ est tel que

$$\langle g, f(\cdot + c) \rangle = 0 \text{ pour tout } c \in \mathbb{R},$$

alors $g = 0$.

(2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}_x^+ f \neq 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $g \in L^2(\mathbb{R})$ est tel que

$$\langle g, h * f \rangle = 0 \text{ pour tout } h \in L^2(\mathbb{R}),$$

alors $g = 0$.

Exercice 9. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que f et Df sont deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\mathbb{F}^+ f$ et $x \mapsto x\mathbb{F}_x^+ f$ sont des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$. (Indice : considérer $\int_0^x f(t)Df(t) dt$ et montrer que si g et $x \mapsto xg(x)$ sont $L^2(\mathbb{R})$ alors $g \in L^1(\mathbb{R})$)

8. Séries trigonométriques de Fourier

— Exercices de base —

Exercice 1. On considère l'espace de Hilbert $L^2([0, 1])$.

- (1) Montrer que les fonctions f et g définies par $f(x) = \cos(2\pi x)$ et $g(x) = e^{4i\pi x}$ y sont orthogonales.
- (2) Développer les fonctions g_1, g_2, g_3 en série trigonométrique de Fourier dans cet espace, en exprimant la réponse finale à l'aide de fonction sinus et cosinus et en simplifiant au maximum l'expression.

$$g_1(x) = \cos(10\pi x), \quad g_2(x) = \cos^4(\pi x), \quad g_3(x) = \cos(\pi x).$$

- (3) En déduire que

$$\frac{\sqrt{2}}{16}\pi = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{2m-1}{16m^2 - 16m + 3}.$$

Exercice 2. On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- (1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de f sur $[-\pi, \pi]$.
- (2) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

Exercice 3. (1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction f donnée par $f(x) = |\sin(x)|$, $x \in \mathbb{R}$.

- (2) Déterminer la somme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2 - 1} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2 - 1}.$$

Exercice 4. (1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier sur $[-\pi, \pi]$ de la fonction f donnée par $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

- (2) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m^2 + 1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2 + 1}.$$

Exercice 5. (1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi]$.

(2) En déduire la valeur de la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+k)^2}.$$

Exercice 6. Développer la fonction

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

en série de Fourier trigonométrique dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. En déduire la valeur de la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.$$

Exercice 7. Développer les fonctions suivantes en série trigonométrique de Fourier dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} f(x) &:= \chi_{]-\pi, -\pi/2]}(x) - \chi_{]-\pi/2, \pi/2]}(x) + \chi_{] \pi/2, \pi]}(x), \\ g(x) &:= \chi_{]-\pi, -\pi/2]}(x) - \chi_{]-\pi/2, 0]}(x) + \chi_{]0, \pi/2]}(x) - \chi_{] \pi/2, \pi]}(x). \end{aligned}$$

Exercice 8. Développer en série trigonométrique de Fourier :

- | | |
|---|--|
| (1) $f_1(x) = \sin(x)$ dans $L^2([0, 2\pi])$ et dans $L^2([0, \pi])$, | (5) $f_5(x) = \sin^2(x)$ dans $L^2([0, \pi])$, |
| (2) $f_2(x) = x^3$ dans $L^2([-\pi, \pi])$ et dans $L^2([0, 2\pi])$, | (6) $f_6(x) = \sin(x) \sin(x) $ dans $L^2([0, 2\pi])$, |
| (3) $f_3(x) = e^x$ dans $L^2([-\pi, \pi])$ et dans $L^2([0, 2\pi])$, | (7) $f_7(x) = \sin^3(x)$ dans $L^2([0, 2\pi])$, |
| (4) $f_4(x) = x \chi_{[-\pi, 0]}(x)$ dans $L^2([-\pi, \pi])$ et dans $L^2([0, 2\pi])$, | (8) $f_8(x) = \sin(x) \cos^2(x)$ dans $L^2([0, 2\pi])$. |

Exercice 9. Soit E l'ensemble des polynômes complexes de degré plus petit ou égal à 2.

- (1) Montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
- (2) Si $P, Q \in E$, on définit

$$\langle P, Q \rangle = P(0)\overline{Q(0)} + P(1)\overline{Q(1)} + P(i)\overline{Q(i)}.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

- (3) A quelles conditions sur $a, b, c \in \mathbb{C}$ l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par

$$\langle P, Q \rangle = P(a)\overline{Q(a)} + P(b)\overline{Q(b)} + P(c)\overline{Q(c)},$$

pour tout $P, Q \in E$, est-elle un produit scalaire sur E ?

— Exercices de dépassements —

Exercice 10. Posons $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, posons

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

Le polynôme P_n est appelé polynôme de Legendre de degré n .

- (1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver que P_n est effectivement un polynôme de degré n .
- (2) Démontrer la formule de Rodrigues

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n ((x^2 - 1)^n).$$

- (3) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que le polynôme P_n est une solution particulière de l'équation différentielle

$$D((1-x^2)Df(x)) + n(n+1)f(x) = 0.$$

(4) En déduire que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale dans $L^2([-1, 1])$.

Exercice 11 (Noyau de Poisson). Pour tout $r \in [0, 1[$, on pose

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on pose aussi $e_m(x) = e^{imx}$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) Pour tous $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que

$$P_r(\theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} e_m(\theta).$$

(2) Pour tout $r \in [0, 1[$, calculer (si possible) la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta.$$

(3) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2π . Montrer que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} \langle f, e_m \rangle e_m(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P_r(\theta - t) dt$$

pour tous $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. En déduire que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} \langle f, e_m \rangle e_m(\theta) = f(\theta)$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 12 (Formule sommatoire de Poisson). Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $x \mapsto x^2 f(x)$ soit borné sur $\mathbb{R}$. Démontrer que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}_{2\pi m}^- f) e^{2i\pi m x}$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$

Travail dirigé 2**Exercice 1.** Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.(a) Il existe une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\mathcal{F}_y^- f = \frac{y^2}{1+y^2}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

(b) Si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que sa transformée de Fourier est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors f est borné (presque partout) sur $\mathbb{R}$.(c) Le produit d'une fonction de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ par sa transformée de Fourier est intégrable sur $\mathbb{R}$.**Exercice 2.** Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{cx} \chi_{[0, +\infty[}(x)$ où c est un paramètre complexe.(a) Déterminer si possible le produit de convolution $f \star f$ en tout point de $\mathbb{R}$.(b) Pour quelles valeurs complexes de c la fonction $f \star f$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$? Justifier.**Exercice 3.** Soient les fonctions f , g et h définies explicitement par

$$f(x) = i\pi \sin(x) \chi_{[-\pi, \pi]}(x), \quad g(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^2 - 1}.$$

Montrer que f est continu sur $\mathbb{R}$ et que g et h se prolongent continûment sur $\mathbb{R}$. Déterminer si possible la transformée de Fourier de ces fonctions. Préciser à chaque fois s'il s'agit d'une transformée de Fourier de fonction intégrable ou de fonction de carré intégrable.**Exercice 4.** Pour tout $a \in \mathbb{R}_0$, calculer si possible la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x) \sin(x)}{x(x^2 + a^2)} dx.$$

Exercice 5. Soient les fonctions f , g (d'une variable réelle) données explicitement par

$$f(x) = \sin(x) \chi_{[-\pi, \pi]}(x), \quad g(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^2 - 1}.$$

(1) Si possible, déterminer les transformées de Fourier (+) et (-) de f et g .

(2) Si possible, en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\pi x)}{(x^2 - 1)^2} dx.$$

Exercice 6. Soit la fonction impaire f définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$ si $x \in [0, \pi]$.(a) Développer si possible cette fonction en série trigonométrique de Fourier sur $[-\pi, \pi]$. Exprimer votre réponse en utilisant uniquement des fonctions sinus et cosinus et simplifier au maximum vos calculs.

(b) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^6}.$$

Exercice 7. On donne les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ -e^x & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

$$f_3(x) = e^{-|x|} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad f_4(x) = \frac{1}{1+ix} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- (1) Pour chacune de ces fonctions, déterminer à quel(s) espace(s) $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ elle appartient.
- (2) Déterminer ensuite la norme de chacune de ces fonctions dans chacun des espaces auquel elle appartient.
- (3) Représenter les fonctions f_1 , f_2 , f_3 dans un même repère orthonormé.
- (4) Déterminer la transformée de Fourier $(-)$ de f_1 , f_2 , f_3 , en spécifiant s'il s'agit de la transformée dans L^1 ou L^2 .
- (5) Déterminer la transformée de Fourier $(+)$ de f_4 , en spécifiant s'il s'agit de la transformée dans L^1 ou L^2 . Montrer que cette transformée est nulle sur $] -\infty, 0[$.
- (6) Déterminer (si possible) le produit de composition $f_1 * f_1$ ainsi que sa transformée de Fourier $(-)$.

Exercice 8. On donne les fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad g(x) = e^{-|x|} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- (1) Pour chacune de ces fonctions, déterminer à quel(s) espace(s) $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ elle appartient.
- (2) Déterminer ensuite la norme de chacune de ces fonctions dans chacun des espaces auquel elle appartient.
- (3) Déterminer la transformée de Fourier $(-)$ de chacune de ces fonctions, en spécifiant s'il s'agit de la transformée dans L^1 ou L^2 .
- (4) Si R désigne la partie réelle de la transformée de Fourier $(-)$ de f et I désigne la partie imaginaire de cette transformée, montrer que l'on a

$$2(R(y) - yI(y)) = \mathcal{F}^- g(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

- (5) Déterminer (si possible) le produit de composition $g * g$ ainsi que sa transformée de Fourier $(-)$.

— Exercices de dépassement —

Exercice 9. Soit $f \in C_1([0, 2\pi])$ une fonction à valeurs réelles telle que $f(0) = f(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$.

- (a) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt \leq \int_0^{2\pi} (Df(t))^2 dt.$$

- (b) Montrer que l'égalité a lieu si et seulement si $f = a \cos + b \sin$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.