MATH0247 Ecrit de janvier 2022

CORRIGE succinct

Question 1 Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ soit la fonction f_m définie par

$$f_m(x) = mx^2 e^{-x\sqrt{m}}.$$

(1.1) Déterminer le plus grand ensemble $A \subset \mathbb{R}$ sur lequel la suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge ponctuellement. Déterminer la limite ponctuelle.
(1.2) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur A et sur $[r, +\infty[$ où $r > 0$.
(1.3) Pour tout m, déterminer si possible la norme de f_m dans $L^1(A)$.
(1.4) Etudier la convergence de la suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ dans $L^1(A)$.

Solution (succincte). (1.1) L'ensemble A est $[0, +\infty[$ (car...) et la limite ponctuelle f est la fonction nulle.

(1.2) On a

$$\sup_{x\in A} |f_m(x) - f(x)| \;=\; \sup_{x\geq 0} \left(mx^2 e^{-\sqrt{m}x}\right) \;=\; f_m\left(\frac{2}{\sqrt{m}}\right) \;=\; 4e^{-2}$$

donc la convergence n'est pas uniforme sur A. Par contre, si $r > 0$, on a

$$\sup_{x\geq r} |f_m(x) - f(x)| \;=\; \sup_{x\geq r} \left(mx^2 e^{-\sqrt{m}x}\right) \;=\; f_m(r)$$

pour tout m tel que $r > \sqrt{2}/m$ donc

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{x\geq r} |f_m(x) - f(x)| \;=\; \lim_{m\to\infty} f_m(r) \;=\; 0$$

et on a bien la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

(1.3) Les fonctions f_m appartiennent bien à $L^1(A)$ (car...). Cela étant, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\|f_m\|_{L^1(A)} \;=\; m\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x\sqrt{m}}\, dx \;= \ldots = \frac{2}{\sqrt{m}}.$$

(1.4) Vu la valeur des normes, il est clair que la suite converge dans $L^1(A)$ vers $f = 0$.

Question 2 On donne les fonctions f, g explicitement par

$$f(x) = x \qquad g(x) = e^{-|x|}.$$

Ces fonctions sont-elles composables ? Si oui, en déterminer le produit de composition.

Solution (succincte). Comme f n'appartient à aucun espace $L^p(\mathbb{R})$ pour $p = 1, 2, \infty$, on doit examiner l'existence en repartant de la définition.

Pour $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(y-x)\,g(x) = (y-x)\,e^{-|x|} = ye^{-|x|} - xe^{-|x|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (car...) ; dès lors le produit de convolution existe quel que soit y. On a alors directement (noter $x \mapsto xe^{-|x|}$ est impair et intégrable donc d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$)

$$(f * g)(y) \;=\; \int_{\mathbb{R}} (ye^{-|x|} - xe^{-|x|})\, dx \;=\; y\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}\, dx \;=\; 2y\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx \;=\; 2y.$$

<u>Question 3</u> On donne les fonctions f et g explicitement par

$$f(x) = e^{-x}\chi_{]0,+\infty[}, \quad g(x) = \frac{1}{1-ix}.$$

(3.1) Les fonctions f et g appartiennent-elles à $L^1(\mathbb{R})$ (resp. $L^2(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})$) ? Si oui, en déterminer la norme dans ces espaces.
(3.2) Déterminer les transformées de Fourier de ces fonctions, en spécifiant dans quel espace (L^1 ou L^2) vous travaillez.

Solution (succincte). (3.1) La fonction f appartient à $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ (car...) et la fonction g appartient à $L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ (car...) mais pas à $L^1(\mathbb{R})$ (car...)

D'une part on a

$$\|f\|_1 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx \;=\; 1,$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-2x}\, dx} \;=\; \sqrt{\frac{1}{2}} \;=\; \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et

$$\|f\|_\infty = \sup_{x>0} e^{-x} \;=\; 1.$$

Et d'autre part

$$\|g\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|1-ix|^2}} \;=\; \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}} \;=\; \sqrt{2\,\frac{\pi}{2}} \;=\; \sqrt{\pi}$$

et

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{|1-ix|} \;=\; \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \;=\; 1.$$

(3.2) Dans L^1, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^\pm f \;&=\; \int_0^{+\infty} e^{\pm ixy} e^{-x}\, dx \\
&=\; \int_0^{+\infty} e^{x(\pm iy-1)}\, dx \\
&=\; \frac{1}{\pm iy - 1} \int_0^{+\infty} De^{x(\pm iy-1)}\, dx \\
&=\; \frac{1}{\mp iy + 1}.
\end{aligned}$$

On constate donc que

$$\mathcal{F}^+ f \;=\; g.$$

Comme $f \in L^2 \cap L^1$, on a aussi

$$\mathbb{F}^+ f = \mathcal{F}^+ f$$

donc, dans L^2,

$$\mathbb{F}^- g \;=\; \mathbb{F}^-\mathbb{F}^+ f \;=\; 2\pi f.$$

L'autre transformation s'obtient par $\mathbb{F}_y^+ g = \mathbb{F}_{-y}^- g = 2\pi f(-y)$.

Question 4 Soit $f \in L^2([0,1])$ et soit F la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$F(x) \;=\; \int_0^x f(t)\; dt.$$

Justifier que F est bien défini et que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{\sqrt{x}} \;=\; 0.$$

Solution. Pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $t \mapsto f(t)$ est intégrable sur $[0,x]$ comme produit de deux fonctions de carré intégrable car on a $f(t) = f(t)\chi_{[0,x]}(t)$ avec f et $\chi_{[0,x]}$ de carré intégrable sur $[0,x]$.

Cela étant, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne, quel que soit $x \in]0,1]$,

$$|F(x)| \;=\; \left|\int_0^x f(t)\; dt\right| \;\leq\; \sqrt{\int_0^x 1\; dt}\;\sqrt{\int_0^x |f(t)|^2\; dt} \;=\; \sqrt{x}\;\sqrt{\int_0^x |f(t)|^2\; dt}$$

donc

$$0 \;\leq\; \left|\frac{F(x)}{\sqrt{x}}\right| \;\leq\; \sqrt{\int_0^x |f(t)|^2\; dt}.$$

Comme f est de carré intégrable sur $[0,1]$, on a $\lim_{x\to 0^+} \int_0^x |f(t)|^2\; dt = 0$ donc, par le théorème de l'étau

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{\sqrt{x}} \;=\; 0.$$

Question 5 On considère l'espace de Hilbert $L^2([-\pi,\pi])$ et les fonctions f, g données explicitement par

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \sin^2(x/2).$$

(5.1) Dans cet espace, déterminer le développement en série trigonométrique de f et de g en simplifiant au maximum les expressions obtenues.
(5.2) En déduire que

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2} \;=\; \frac{\pi^2}{12}.$$

Solution (succincte). (5.1) Les fonctions $x \mapsto e_m(x) = (1/\sqrt{2\pi})e^{imx}$ ($m \in \mathbb{Z}$), forment une suite orthonormée totale de $L^2([-\pi,\pi])$. Comme

$$g(x) \;=\; \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \;=\; \frac{1-\cos(x)}{2} \;=\; \frac{1}{2} - \frac{e^{ix}}{4} - \frac{e^{-ix}}{4},$$

le développement de g est immédiat.

Pour f on a, pour tout $m \in \mathbb{Z}_0$,

$$\begin{aligned}
< f, e_m > &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, e^{-imx}\; dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} x^2\, \cos(mx)\; dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{m} \int_0^{\pi} x^2\, D\sin(mx)\; dx \\
&= \ldots \\
&= (-1)^m\, \frac{2\sqrt{2\pi}}{m^2}.
\end{aligned}$$

Et pour $m = 0$, on a

$$< f, e_0 > = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx \; = \; \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\pi} x^2 \, dx \; = \; \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi^3}{3}.$$

Après quelques calculs et simplifications, on trouve ainsi

$$x^2 \; = \; \sum_{m=-\infty}^{+\infty} < f, e_m > \, e_m(x) \; = \; \frac{\pi^2}{3} \; + \; 4 \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m \, \frac{\cos(mx)}{m^2}$$

dans $L^2([-\pi, \pi])$.

(5.2) Comme f appartient à $C_\infty(\mathbb{R})$, l'égalité précédente est valable en tout $x \in [-\pi, \pi]$; pour $x = 0$, cela donne

$$0 \; = \; \frac{\pi^2}{3} \; + \; 4 \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m \, \frac{1}{m^2},$$

ce qui conduit à

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2} \; = \; \frac{\pi^2}{12}.$$