MATH0247 Ecrit de janvier 2023

CORRIGE succinct

<u>Question 1</u> **Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ soit la fonction f_m définie par**

$$f_m(x) = me^{-m^2 x} \quad x \in [0, +\infty[.$$

(1.1) Etudier la convergence ponctuelle de cette suite sur $[0, +\infty[$.
(1.2) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur $]0, +\infty[$ et sur les intervalles fermés borné inclus dans $]0, +\infty[$.
(1.3) Si c'est possible, étudier la convergence de la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) dans les espaces $L^1(]0, +\infty[)$ et $L^2(]0, +\infty[)$.

Solution (succincte). (1.1) La suite $f_m(0) = m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers $+\infty$ et pour $x > 0$, la suite $f_m(x) = me^{-m^2 x}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers 0 (car ...). La suite donnée converge donc ponctuellement vers 0 sur l'ensemble $]0, +\infty[$.

(1.2) Quel que soit le naturel non nul m, on a

$$\sup_{x>0} |f_m(x) - f(x)| \; = \; \sup_{x>0} \left(me^{-m^2 x} \right) \; = \; f_m(0) \; = \; 1$$

puisque la fonction $x \mapsto me^{-m^2 x}$ est décroissante et continue sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que la convergence n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$. Par contre, si $r > 0$, on a

$$\sup_{x \geq r} |f_m(x) - f(x)| \; = \; \sup_{x \geq r} \left(me^{-m^2 x} \right) \; = \; f_m(r) \; = \; me^{-m^2 r}$$

(encore à cause de la décroissance de la fonction $x \mapsto me^{-m^2 x}$) donc

$$\lim_{m \to +\infty} \sup_{x \geq r} |f_m(x) - f(x)| \; = \; \lim_{m \to \infty} f_m(r) \; = \; 0.$$

Ainsi, on a la convergence uniforme sur $[r, +\infty[$ donc sur tout intervalle fermé borné inclus dans $]0, +\infty[$.

(1.3) Les fonctions f_m appartiennent bien à $L^1(]0, +\infty[) \cap L^2(]0, +\infty[)$ (car ...). S'il y a convergence dans ces espaces, c'est nécessairement vers la limite ponctuelle 0 (car ...).

Cela étant, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ on a

$$\|f_m\|_{L^1(]0,+\infty[)} \; = \; m \int_0^{+\infty} e^{-m^2 x} \, dx \; = \ldots = \frac{1}{m}$$

et

$$\|f_m\|^2_{L^2(]0,+\infty[)} \; = \; m^2 \int_0^{+\infty} e^{-2m^2 x} \, dx \; = \ldots = \frac{1}{2}.$$

Il s'ensuit que l'on a bien la convergence dans L^1 mais pas dans L^2.

<u>Question 2</u> **On donne la fonction f par**

$$f \; : \; x \mapsto f(x) = e^x \chi_{]-\infty,0[}.$$

Si possible, déterminer l'expression explicite de $f * f$.

Solution (succincte). La fonction donnée est (notamment) intégrable sur $\mathbb{R}$ (car ...) donc le produit de composition existe ; comme la fonction est aussi bornée, le produit de composition existe pour tout x (cas $L^1 * L^\infty \subset L^\infty$).

Cela étant quel que soit le réel x, on a

$$\begin{aligned}(f*f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{]-\infty,0[}(y)\, e^y\, e^{x-y}\, \chi_{]-\infty,0[}(x-y)\; dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{]-\infty,0[\cap]x,+\infty[}(y)\, e^x\; dy.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$(f*f)(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \geq 0$$

et

$$(f*f)(x) = \int_x^0 e^x\; dy = -xe^x \quad \text{si} \quad x < 0.$$

Question 3 Soit la fonction $f : x \mapsto x\, e^{-x^2}$. Si possible, déterminer les transformées de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ de cette fonction.

Solution (succincte). La fonction donnée est bien intégrable (car ...). On peut donc en déterminer les transformées de Fourier.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a successivement

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_y^{\pm} f &= \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy}\, f(x)\; dx \\ &= \frac{-1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy}\, De^{-x^2}\; dx \\ &= \frac{\pm iy}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy}\, e^{-x^2}\; dx \quad \text{car} \ldots \\ &= \frac{\pm iy}{2}\, \mathcal{F}_y^{\pm} e^{-.^2} \\ &= \frac{\pm iy\sqrt{\pi}}{2} e^{-y^2/4},\end{aligned}$$

la dernière égalité étant obtenue grâce à la forme explicite des transformées de Fourier des gaussiennes.

Question 4 4.1) Pour quelles valeurs des réels r, s les fonctions $x \mapsto x^s$ et $x \mapsto (1-x)^r$ sont-elles de carré intégrable sur $]0,1[$? Préciser pourquoi elles ne le sont pas pour les autres valeurs.
(4.2) Montrer alors que

$$B(s+1, r+1) \leq \frac{1}{\sqrt{(1+2s)(1+2r)}}.$$

Solution. 4.1) On doit déterminer les valeurs des réels r, s pour que les fonctions $x \mapsto x^{2s}$ et $x \mapsto (1-x)^{2r}$ soient intégrables sur $]0,1[$. La première fonction est continue sur $]0,1]$ et la seconde sur $[0,1[$; l'intégrabilité doit donc être examinée en 0^+ pour la première fonction et en 1^- pour la seconde.

Cela étant, vu les cas fondamentaux d'intégrabilité de telles fonctions, on a directement que $x \mapsto x^{2s}$ est intégrable en 0^+ si et seulement si $-2s < 1$, c'est-à-dire $s > -1/2$, et que $x \mapsto (1-x)^{2r}$ est intégrable en 1^- si et seulement si $-2r < 1$, c'est-à-dire si et seulement si $r > -1/2$.

4.2) Considérons donc r, s strictement plus grands que $-1/2$. Par définition

$$B(m,n) \;=\; \int_0^1 x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}\;dx, \quad m,n>0;$$

comme r et s sont strictement plus grands que $-1/2$, alors $r+1$ et $s+1$ sont strictement plus grands que $1/2$, donc strictement positifs et l'expression $B(s+1,r+1)$ a donc bien un sens et on a

$$B(s+1,r+1) \;=\; \int_0^1 x^s\,(1-x)^r\;dx.$$

Cela étant, les fonctions $x \mapsto x^s$ et $x \mapsto (1-x)^r$ étant de carré intégrable sur $]0,1[$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne directement

$$B(s+1,r+1) \;\leq\; \sqrt{\int_0^1 x^{2s}\;dx}\;\sqrt{\int_0^1 (1-x)^{2r}\;dx} \;=\; \frac{1}{\sqrt{(1+2s)(1+2r)}}.$$

<u>Question 5</u> On considère l'espace de Hilbert $L^2([-\pi/2,\pi/2])$.
Développer les fonctions f,g suivantes en série trigonométrique de Fourier dans cet espace, en exprimant la réponse finale à l'aide de fonctions sinus et cosinus et en simplifiant au maximum l'expression.

$$f(x)=\sin(x)\,\cos(x), \quad g(x)=|\sin(x)|$$

En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{4m^2-1} \quad \textbf{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{4m^2-1}.$$

Solution. Remarquons que les fonctions données sont continues sur $\mathbb{R}$ donc de carré intégrable sur $[-\pi/2,\pi/2]$. La question posée a donc un sens.

(5.1) *Utilisation des fonctions exponentielles comme suite orthonormée totale.*

Les fonctions $x \mapsto e_m(x) = (1/\sqrt{\pi})e^{2imx}$ ($m \in \mathbb{Z}$), forment une suite orthonormée totale de $L^2([-\pi/2,\pi/2])$. Comme

$$f(x) \;=\; \frac{\sin(2x)}{2} \;=\; \frac{1}{4i}\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right) \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{4i}\,e_1(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{4i}\,e_{-1}(x),$$

on obtient directement le développement de f.

Passons à g. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} < g, e_m > \;&=\; \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(x)|\,e^{-2imx}\;dx \\ &=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,\cos(2mx)\;dx \quad \text{car} \ldots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} \Big(\sin(x+2mx) + \sin(x-2mx) \Big) \; dx \\
&= \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{D\cos(x+2mx)}{1+2m} + \frac{D\cos(x-2mx)}{1-2m} \right) \; dx \\
&= \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{-1}{1+2m} - \frac{1}{1-2m} \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{1-4m^2}.
\end{aligned}
$$

On a alors successivement (convergence dans $L^2([-\pi/2, \pi/2])$) :

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} < g, e_m > \; e_m(x) \\
&= \frac{2}{\pi} + \sum_{m=-\infty}^{-1} < g, e_m > \; e_m(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} < g, e_m > \; e_m(x) \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{1-4m^2} \left(e_m(x) + e_{-m}(x) \right) \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1} \; \cos(2mx).
\end{aligned}
$$

Utilisation des fonctions sinus et cosinus comme suite orthonormée totale.

Les fonctions $x \mapsto u_m(x) = \sqrt{2/\pi}\cos(2mx)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$, $x \mapsto u_0(x) = \sqrt{1/\pi}$ et $x \mapsto v_m(x) = \sqrt{2/\pi}\sin(2mx)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$, forment une suite orthonormée totale de $L^2([-\pi/2, \pi/2])$. Comme

$$
f(x) = \frac{\sin(2x)}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\, v_1(x)
$$

on obtient directement le développement de f.

Passons à g. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $< g, v_m >= 0$ car f est une fonction paire. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a

$$
\begin{aligned}
< g, u_m > &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(x)| \; \cos(2mx) \; dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi/2} 2\sin(x) \; \cos(2mx) \; dx \quad \text{car} \ldots \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi/2} \Big(\sin(x+2mx) + \sin(x-2mx) \Big) \; dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{2}{1-4m^2}.
\end{aligned}
$$

Finalement

$$
\begin{aligned}
< g, u_0 > &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(x)| \; dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} \sin(x) \; dx \quad \text{car} \ldots \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}
$$

On a alors successivement (convergence dans $L^2([-\pi/2, \pi/2])$) :

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{m=0}^{+\infty} < g, u_m > \ u_m(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} < g, v_m > \ v_m(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{1-4m^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(2mx) \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1} \ \cos(2mx). \end{aligned}$$

Cela étant, la fonction g étant continue sur $\mathbb{R}$ et « C_1 » par morceaux sur $[-\pi/2, \pi/2]$ (puisque égale à $-\sin$ sur $[-\pi/2, 0]$ et à $\sin$ sur $[0, \pi/2]$), on a

$$g(0) \ = \ 0 \ = \ \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1}$$

donc

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1} \ = \ \frac{1}{2}$$

et

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) \ = \ 1 \ = \ \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1} \, (-1)^m$$

donc

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2-1} \ = \ \left(-1 + \frac{2}{\pi}\right) \frac{\pi}{4} \ = \ \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$