MATH0247 Ecrit de janvier 2024

CORRIGE succinct

Question 1 (cf janvier 2023) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ soit la fonction f_m définie par

$$f_m(x) = me^{-m^2 x} \quad x \in [0, +\infty[.$$

(1.1) Etudier la convergence ponctuelle de cette suite sur $[0, +\infty[$.
(1.2) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur $]0, +\infty[$ et sur les intervalles fermés borné inclus dans $]0, +\infty[$.

Solution (succincte). (1.1) La suite $f_m(0) = m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers $+\infty$ et pour $x > 0$, la suite $f_m(x) = me^{-m^2 x}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers 0 (car ...). La suite donnée converge donc ponctuellement vers 0 sur l'ensemble $]0, +\infty[$.

(1.2) Quel que soit le naturel non nul m, on a

$$\sup_{x>0} |f_m(x) - f(x)| \; = \; \sup_{x>0} \left(me^{-m^2 x} \right) \; = \; f_m(0) \; = \; m$$

puisque la fonction $x \mapsto me^{-m^2 x}$ est décroissante et continue sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que la convergence n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$. Par contre, si $r > 0$, on a

$$\sup_{x \geq r} |f_m(x) - f(x)| \; = \; \sup_{x \geq r} \left(me^{-m^2 x} \right) \; = \; f_m(r) \; = \; me^{-m^2 r}$$

(encore à cause de la décroissance de la fonction $x \mapsto me^{-m^2 x}$) donc

$$\lim_{m \to +\infty} \sup_{x \geq r} |f_m(x) - f(x)| \; = \; \lim_{m \to \infty} f_m(r) \; = \; 0.$$

Ainsi, on a la convergence uniforme sur $[r, +\infty[$ donc sur tout intervalle fermé borné inclus dans $]0, +\infty[$.

Question 2 (voir aussi janvier 2022). On donne les fonctions f, g, h explicitement par

$$f(x) = e^{-|x|}, \quad g(x) = e^{-x} \chi_{]0,+\infty[}(x), \quad h(x) = \frac{1}{1 - ix}.$$

(2.1) Les fonctions f et g sont-elles composables ? Si oui, en déterminer le produit de composition.
(2.2) Si possible, déterminer les transformées de Fourier g et h, en spécifiant dans quel espace (L^1 ou L^2) vous travaillez.

Solution (succincte). (2.1) Les fonctions f et g appartiennent à $L^1 \cap L^2 \cap L^\infty$ (car ...) ; leur produit de composition est donc défini partout et on a

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|} \, e^{-(x-y)} \chi_{]0,+\infty[}(x - y) \; dy = \int_{-\infty}^{x} e^{-|y|} \, e^{-(x-y)} \; dy.$$

Cela étant, pour $x \leq 0$, on a

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{x} e^y \, e^{-(x-y)} \, dy = e^{-x} \int_{-\infty}^{x} e^{2y} \, dy = \frac{e^x}{2}$$

et pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
(f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{0} e^y \, e^{-(x-y)} \, dy + \int_{0}^{x} e^{-y} \, e^{-(x-y)} \, dy \\
&= e^{-x} \int_{-\infty}^{0} e^{2y} \, dy + e^{-x} \int_{0}^{x} 1 \, dy \\
&= \frac{e^{-x}}{2} + xe^{-x}.
\end{aligned}$$

(2.2) Dans L^1, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^{\pm} g &= \int_{0}^{+\infty} e^{\pm ixy} e^{-x} \, dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} e^{x(\pm iy - 1)} \, dx \\
&= \frac{1}{\pm iy - 1} \int_{0}^{+\infty} D e^{x(\pm iy - 1)} \, dx \\
&= \frac{1}{\mp iy + 1}.
\end{aligned}$$

On constate donc que

$$\mathcal{F}^{+} g = h.$$

Comme $g \in L^2 \cap L^1$, on a aussi

$$\mathbb{F}^{+} g = \mathcal{F}^{+} g$$

donc, dans L^2,

$$\mathbb{F}^{-} h = \mathbb{F}^{-} \mathbb{F}^{+} g = 2\pi g.$$

L'autre transformation s'obtient par $\mathbb{F}_y^{+} h = \mathbb{F}_{-y}^{-} h = 2\pi g(-y)$.

Question 3 (cf janvier 2020 et 2022) Soit $f \in L^2([0,1])$ et soit F la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$F(x) = \int_0^x f(t) \, dt.$$

Justifier que F est bien défini et que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{\sqrt{x}} = 0.$$

Solution. Pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $t \mapsto f(t)$ est intégrable sur $[0,x]$ comme produit de deux fonctions de carré intégrable car on a $f(t) = f(t)\chi_{[0,x]}(t)$ avec f et $\chi_{[0,x]}$ de carré intégrable sur $[0,x]$.

Cela étant, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne, quel que soit $x \in]0,1]$,

$$|F(x)| = \left| \int_0^x f(t) \, dt \right| \leq \sqrt{\int_0^x 1 \, dt} \sqrt{\int_0^x |f(t)|^2 \, dt} = \sqrt{x} \sqrt{\int_0^x |f(t)|^2 \, dt}$$

donc

$$0 \;\leq\; \left|\frac{F(x)}{\sqrt{x}}\right| \;\leq\; \sqrt{\int_0^x |f(t)|^2 \, dt}.$$

Comme f est de carré intégrable sur $[0,1]$, on a $\lim_{x\to 0^+}\int_0^x |f(t)|^2 \, dt = 0$ donc, par le théorème de l'étau

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)}{\sqrt{x}} \;=\; 0.$$

Question 4 On considère l'espace de Hilbert $L^2([-\pi,\pi])$. Développer les fonctions f, g suivantes en série trigonométrique de Fourier dans cet espace, en exprimant la réponse finale à l'aide de fonctions sinus et cosinus et en simplifiant au maximum l'expression.

$$f(x) = \sin(x/2)\,\cos(x/2), \quad g(x) = x^2$$

En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m^2} \quad \textbf{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^4}.$$

Solution (succincte). Les fonctions f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ donc sont de carré intégrable sur tout ensemble fermé borné, en particulier sur $[-\pi,\pi]$. Elle appatriennent donc à $L^2([-\pi,\pi])$.

Cela étant, on sait que les fonctions

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ u_m(x) = \frac{\cos(mx)}{\sqrt{\pi}},\ v_m(x) = \frac{\sin(mx)}{\sqrt{\pi}} \ m \in \mathbb{N}_0$$

forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert $L^2([-\pi,\pi])$. On obtient donc directement

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}v_1(x).$$

Et pour g, après quelques calculs, on trouve

$$g(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m\frac{\cos(mx)}{m^2} \quad \text{dans } L^2([-\pi,\pi]).$$

Par ailleurs, d'une part comme $g \in C_1(\mathbb{R})$, l'égalité ci-dessus est valable pour tout $x \in]-\pi,\pi[$, en particulier pour $x = 0$; on obtient ainsi

$$g(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m\frac{1}{m^2}$$

donc

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Et d'autre part, comme

$$\|g\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \, dx = 2\int_0^{\pi} x^4 \, dx = \frac{2\pi^5}{5},$$

l'égalité (dans $L^2([-\pi,\pi])$)

$$g = \frac{\pi^2\sqrt{2\pi}}{3}u_0 + 4\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m\frac{\sqrt{\pi}}{m^2}u_m$$

donne

$$\|g\|_2^2 = \frac{2\pi^5}{5} = \frac{\pi^4\ 2\pi}{9} + \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{16\pi}{m^4}.$$

Finalement on obtient

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^4} = \frac{2\pi^4}{16}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right) = \frac{2\pi^4}{16}\times\frac{4}{45} = \frac{\pi^4}{90}.$$