Bloc 2 en sciences physiques
ANALYSE II, MATH0247

Examen écrit

date 14/01/25, heure 9h-12h30 (3h30), local 01 (B37)

CONSIGNES

- ▷ L'épreuve dure 3h30.
- ▷ Sur **chaque** feuille, indiquer vos nom (EN CARACTERES d'IMPRIMERIE) et prénom.
- ▷ Répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées.
- ▷ Justifier toutes vos réponses. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent de façon importante dans l'appréciation des copies.
- ▷ Les calculatrices, gsm etc ... sont interdits.

Question 1 Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ soit la fonction f_m définie par

$$f_m(x) = m^2 x^2 e^{-xm}.$$

- (1.1) Déterminer le plus grand ensemble $A \subset \mathbb{R}$ sur lequel la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge ponctuellement. Déterminer la limite ponctuelle.
- (1.2) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur A et sur $[r, +\infty[$ où $r > 0$.
- (1.3) Pour tout m , déterminer si possible la norme de f_m dans $L^1(A)$.
- (1.4) Etudier la convergence de la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) dans $L^1(A)$.

Question 2 On donne explicitement la fonction f par

$$f(x) = e^{-2x} \chi_{]0, +\infty[}(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que la fonction f est composable avec elle-même en tout point et que l'on a $(f * f)(x) = xf(x)$ pour tout x .

Question 3 On donne les fonctions f, g explicitement par

$$f(x) = e^{-x} \chi_{]0, +\infty[}(x), \quad g(x) = \frac{1}{1 - ix}.$$

Si possible, déterminer les transformées de Fourier f et g , en spécifiant dans quel(s) espace(s) (L^1 ou L^2) vous travaillez.

Question 4 Déterminer les réels a, b tels que le polynôme $P_{a,b}(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$ soit orthogonal au polynôme $Q(x) = ix + b$, $x \in \mathbb{R}$ dans $L^2([0, 1])$.

Question 5 On considère l'espace de Hilbert $L^2([-\pi, \pi])$ et les fonctions f, g données explicitement par

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \sin^2(x/2).$$

- (5.1) Dans cet espace, déterminer le développement en série trigonométrique de f et de g en simplifiant au maximum les expressions obtenues.
- (5.2) En déduire que

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Question 1

Voir le corrigé de l'examen de janvier 2022, dans lequel $\sqrt{m}$ doit être remplacé par m .

Question 2 On donne explicitement la fonction f par

$$f(x) = e^{-2x} \chi_{]0, +\infty[}(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que la fonction f est composable avec elle-même en tout point et que l'on a $(f * f)(x) = xf(x)$ pour tout x .

Solutions succincte. La fonction donnée est dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ (car ...) et dès lors le produit de composition existe en tout point.

Cela étant, on a successivement, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (f * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2(x-y)} \chi_{]0, +\infty[}(x-y) e^{-2y} \chi_{]0, +\infty[}(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2x} \chi_{]-\infty, x[}(y) \chi_{]0, +\infty[}(y) dy \\ &= e^{-2x} \int_{\mathbb{R}} \chi_{]-\infty, x[\cap]0, +\infty[}(y) dy. \end{aligned}$$

Lorsque $x \leq 0$ on a $]-\infty, x[\cap]0, +\infty[= \emptyset$ donc $(f * f)(x) = 0$ et comme $f(x) = e^{-2x} \chi_{]0, +\infty[}(x)$ on a aussi $f(x) = 0$ donc finalement $(f * f)(x) = xf(x) = 0$.

Lorsque $x > 0$ on a $]-\infty, x[\cap]0, +\infty[=]0, x[$ donc aussi

$$(f * f)(x) = e^{-2x} \int_0^x dy = x e^{-2x} = xf(x).$$

Question 3

Voir le corrigé de l'examen de janvier 2022, 2024, avec des changements de notation pour deux fonctions (questionnaire de 2024).

Question 4 Déterminer les réels a, b tels que le polynôme $P_{a,b}(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$ soit orthogonal au polynôme $Q(x) = ix + b$, $x \in \mathbb{R}$ dans $L^2([0, 1])$.

Solutions succincte. Un polynôme étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$, il est de carré intégrable sur tout intervalle fermé borné.

Cela étant, un calcul direct conduit à

$$\begin{aligned} \langle P, Q \rangle &= \int_0^1 (ax + b)(b - ix) dx \\ &= \int_0^1 (-iax^2 + (ab - ib)x + b^2) dx \\ &= \dots \\ &= b(a/2 + b) - i(a/3 + b/2). \end{aligned}$$

Un nombre complexe étant nul si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont, un petit calcul permet de trouver que $\langle P, Q \rangle = 0$ si et seulement si $a = b = 0$.

Question 5

Pour la fonction f , voir le corrigé de janvier 2024.

Pour la fonction g , la réponse est immédiate car

$$g(x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} (1 - \cos(x)) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} u_0(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} u_1(x).$$