Analyse II (Math0247)
2020-2021

Cours en ligne du 16 novembre 2020

Divers types de convergence : un bilan
Voir aussi le syllabus du cours, chapitre consacré aux séries de Fourier.

• Rappel du résultat général :
Les fonctions u_m ($m \in \mathbb{Z}$) définies par

$$u_m(x) \ = \ \frac{1}{\sqrt{b-a}}\, e^{2i\pi mx/(b-a)}$$

forment une suite orthonormée totale dans $L^2([a,b])$. Cela signifie que quel que soit $f \in L^2([a,b])$, on a

$$f \ = \ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} < f, u_m > \ u_m \quad (\textit{convergence dans } L^2([a,b]))$$

donc aussi

$$\|f\|^2 \ = \ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} | < f, u_m > |^2.$$

Il faut bien souligner que la convergence signifie ici

$$\lim_{M\to+\infty} \left\| \sum_{m=-M}^{M} < f, u_m > \ u_m \ - \ f \right\|^2 \ = \ \lim_{M\to+\infty} \int_a^b \left| \sum_{m=-M}^{M} < f, u_m > \ u_m(x) \ - \ f(x) \right|^2 \ dx \ = \ 0$$

Se rappeler aussi qu'un résultat semblable existe en « forme réelle », c'est-à-dire en utilisant les fonctions sinus et cosinus à la place des fonctions exponentielles (imaginaires pures).

Dans ce qui suit, on désigne par $S_M(f,.)$ ($M \in \mathbb{N}$) les sommes partielles du développement en série trigonométrique de Fourier de f, que ce soit avec les fonctions exponentielles ou les fonctions sinus, cosinus.

• Puisque la convergence a lieu dans L^2, on sait qu'elle a également lieu presque partout pour une sous-suite de la suite des sommes partielles. Mais on a plus dans le cas des séries trigonométriques de Fourier (théorème de Carleson) :
La suite $S_M(f,.)$ ($M \in \mathbb{N}$) converge presque partout sur $]a,b[$ vers f.

• On a aussi[1] le résultat suivant :
Pour toute fonction f de classe C_1 par morceaux[2] sur $[a,b]$, on a $f \in L^2([a,b])$ et

$$\lim_{M\to+\infty} S_M(f,x) \ = \ f(x)$$

en tout $x \in]a,b[$ où f est dérivable. De plus on a

$$\lim_{M\to+\infty} S_M(f,x) \ = \ \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$$

1. Il existe également d'autres hypothèses sur f pour obtenir des résultats similaires concernant la convergence ponctuelle des séries trigonométriques de Fourier
2. cf cours pour la définition

en tout $x \in]a,b[$*, avec* $f(x+)$ *=limite à droite de* f *en* x *et avec* $f(x-)$ *=limite à gauche de* f *en* x *et*

$$\lim_{M\to+\infty} S_M(f,a) = \lim_{M\to+\infty} S_M(f,b) \;=\; \frac{f(a^+)+f(b^-)}{2}$$

• Bien sûr, au cas par cas, on peut examiner encore d'autres types de convergence (dans L^1, uniformément, ...) en étudiant les coefficients de façon détaillée.

Rappel *Soient* $a,b\in\mathbb{R}$*,* $a<b$*. Si la suite* g_m $(m\in\mathbb{N})$ *converge uniformément vers* g *sur* $[a,b]$ *alors elle converge aussi dans* $L^2([a,b])$ *vers* g*. De plus, quel que soit* $f\in L^2([a,b])$*, on a* $\lim_{m\to+\infty} < f, g_m > = < f, g >$*.*

C'est immédiat de se convaincre de ce résultat car

$$\|g_m-g\|^2 \;=\; \int_a^b |g_m(x)-g(x)|^2\,dx \;\leq\; (b-a)\left(\sup_{x\in[a,b]}|g_m(x)-g(x)|\right)^2$$

et [3]

$$\begin{aligned} |< f, g_m > - < f, g >| &= \left|\int_a^b \overline{f(x)}\,\Big(g_m(x)-g(x)\Big)\,dx\right| \\ &\leq \int_a^b |f(x)|\,dx\ \sup_{x\in[a,b]}|g_m(x)-g(x)| \end{aligned}$$

A propos de la totalité des polynômes de Legendre P_m $(m\in\mathbb{N})$-compléments au syllabus du cours

Quel que soit $m\in\mathbb{N}$ les polynômes P_k $(k=0,\ldots m)$ sont linéairement indépendants puisqu'ils sont orthonormés. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à m étant un espace vectoriel de dimension $m+1$, les $m+1$ polynômes P_k $(k=0,\ldots m)$ en forment une base. Il s'ensuit que quel que soit $m\in\mathbb{N}$, le polynôme $x\mapsto x^m$ est une combinaison linéaire des P_k $(k=0,\ldots m)$.

Cela étant, soit $f\in L^2([-1,1])$ tel que $< f, P_m > = 0$ pour tout m. En posant $Q_m(x)=x^m$ pour tout m, on déduit alors de ce qui précède que $< f, Q_m > = 0$ quel que soit m. Fixons alors $y\in\mathbb{R}$ et considérons la fonction

$$e^{ixy} \;=\; \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(ixy)^m}{m!},\quad x\in[-1,1].$$

La suite des sommes partielles converge en fait uniformément sur $[-1,1]$ puisque quels que soient p,q avec $p<q$, on a

$$\sup_{x\in[-1,1]}\left|\sum_{m=p}^{q}\frac{(ixy)^m}{m!}\right| \;\leq\; \sum_{m=p}^{q}\frac{|y|^m}{m!}.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} < f, e^{iy\cdot} > &= \sum_{m=0}^{+\infty}\int_{-1}^{1} f(x)\,\frac{(-ixy)^m}{m!}\,dx \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-iy)^m}{m!}\int_{-1}^{1} f(x)\,x^m\,dx \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-iy)^m}{m!} < f, Q_m > \\ &= 0. \end{aligned}$$

3. une fonction f qui appartient à L^2_{loc} appartient aussi à L^1_{loc} puisque le produit de deux fonctions qui sont de carré intégrable est intégrable

On a donc obtenu

$$0 =< f, e^{iy\cdot} > = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}\, f(x)\chi_{[-1,1]}(x)\; dx \;=\; \mathcal{F}_y^-\left(f\chi_{[-1,1]}\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

donc $f = 0$ presque partout sur $[-1, 1]$ et on conclut à la totalité annoncée.

F. Bastin, 16 novembre 2020 (V1 : 141120)