Analyse II (Math0247)
2020-2021

A propos du cours en ligne du 26 octobre 2020

≪ Transition ≫ de L^1 vers L^2

Voir le podcast enregistré le 24/10/20

≪ Transformation de Fourier dans L^2 Dans ce qui suit , la notation $\mathrm{IF}^{\pm} f$ désigne les transformées de Fourier de $f \in L^2$ et $\mathcal{F}^{\pm} f$ les transformées de Fourier de $f \in L^1$.

Référence : notes officielles du cours, Chapitre 8, pp 153-156

Quelques remarques et compléments ci-dessous ($n = 1$ pour faciliter les notations)

(1) Le ≪ théorème de transfert dans L^1 ≫ donne l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_x^{\pm} f \; \overline{g}(x) \, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(x) \; \mathcal{F}_x^{\pm} \overline{g} \, dx$$

pour $f, g \in L^1$. Mais on a

$$\mathcal{F}_x^{\pm} \overline{g} \;=\; \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy} \overline{g}(y) \, dy \;=\; \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{\mp ixy} g(y) \, dy} \;=\; \overline{\mathcal{F}_x^{\mp} g}.$$

Dès lors, si en outre $f, g \in L^2$, on peut écrire l'égalité du ≪ transfert ≫ en faisant intervenir le produit scalaire :

$$< \mathcal{F}^{\pm} f, g > = < f, \mathcal{F}^{\mp} g >$$

(2) Si $f \in L^2$ alors $f_m = f \chi_{[-m,m]}$ appartient à $L^1 \cap L^2$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ (car ...) et la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge dans L^2 vers f car la suite $|f_m - f|^2 = |f|^2 \left(1 - \chi_{[-m,m]}\right)$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge pp vers 0 et $|f_m - f|^2 \leq |f|^2$ pour tout m (...).

(3) Exemple pour f défini par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

on a $f \in L^2 \setminus L^1$ et

$$\mathrm{IF}^{\pm} f \;=\; \pi \chi_{[-1,1]}.$$

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a successivement

$$\begin{aligned}
\int_{-m}^{m} e^{\pm ixy} \, f(y) \, dy \quad &= \; 2 \int_0^m \cos(xy) \, f(y) \, dy \\
&= \; 2 \int_0^m \frac{\cos(xy) \, \sin(y)}{y} \, dy \\
&= \; \int_0^m \frac{\sin(y + xy) + \sin(y - xy)}{y} \, dy \\
&= \; \int_0^m \frac{\sin(y(1+x))}{y} \, dy \; + \; \int_0^m \frac{\sin(y(1-x))}{y} \, dy
\end{aligned}$$

et on conclut tout de suite en passant à la limite sur m vu que

$$\int_0^{\to +\infty} \frac{\sin(\lambda y)}{y} \, dy \;=\; \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \;\; \lambda > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \;\; \lambda < 0 \end{cases}$$

(4) Exercice : si les suites f_m, g_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ convergent respectivement vers f, g dans L^2 alors

$$\lim_{m\to+\infty} < f_m, g_m > = < f, g > .$$

F. Bastin, 26 octobre 2020 (V1 : 251020)