Analyse II (Math0247)
2020-2021

Cours en ligne du 29 octobre 2020

Suites orthogonales dans un espace de Hilbert ; séries trigonométriques de Fourier

Voir le podcast enregistré le 27/10/20

Résultat théorique pour les exemples : les fonctions u_m $(m \in \mathbb{Z})$ *définies par*

$$u_m(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{b-a}}\, e^{2i\pi m x/(b-a)}$$

forment une suite orthonormée totale dans $L^2([a,b])$*. Cela signifie que quel que soit* $f \in L^2([a,b])$*, on a*

$$f \;=\; \sum_{m=-\infty}^{+\infty} < f, u_m > \, u_m \quad (\textit{convergence dans } L^2([a,b]))$$

donc aussi

$$\|f\|^2 \;=\; \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |< f, u_m >|^2.$$

Il faut bien souligner que la convergence signifie ici

$$\lim_{M\to+\infty} \left\| \sum_{m=-M}^{M} < f, u_m > \, u_m \;-\; f \right\|^2 \;=\; \lim_{M\to+\infty} \int_a^b \left| \sum_{m=-M}^{M} < f, u_m > \, u_m(x) \;-\; f(x) \right|^2 \, dx \;=\; 0$$

D'autres types de convergence seront précisés plus tard.

Exemples

• **Développer la fonction** $x \mapsto \sin^2(x)$ **en série trigonométrique de Fourier dans** $L^2([0,\pi])$**.**

La fonction donnée est continue sur $\mathbb{R}$, elle appartient donc à L^2_{loc} et peut donc être développée en série trigonométrique de Fourier. Dans le cas présent, le développement (que l'on sait unique) est immédiat. En effet, les fonctions de base sont les fonctions u_m données par

$$u_m(x) \;=\; \frac{e^{2imx}}{\sqrt{\pi}},\; m \in \mathbb{Z}$$

et la fonction à développer s'écrit

$$\sin^2(x) \;=\; \frac{1}{2}\,(1-\cos(2x)) \;=\; \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,u_0(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{4} u_1(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{4} u_{-1}(x).$$

• **Développer la fonction** $f : x \mapsto (\pi - x)/2$ **en série trigonométrique de Fourier dans** $L^2([0,2\pi])$ **et en déduire que**

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \;=\; \frac{\pi^2}{6}.$$

La fonction donnée est continue sur $\mathbb{R}$, elle appartient donc à L^2_{loc} et peut donc être développée en série trigonométrique de Fourier. Calculons donc les coefficients.

Les fonctions de base (sous forme exponentielle) sont les fonctions u_m, $(m \in \mathbb{Z})$ données par

$$u_m(x) \ = \ \frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}}, \ m \in \mathbb{Z}.$$

Cela étant, on a directement

$$< f, u_0 > = \ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} (\pi - x)\, dx \ = \ -\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left[(\pi - x)^2\right]_0^{2\pi} \ = \ 0.$$

Pour $m \in \mathbb{Z}_0$, on obtient successivement

$$\begin{aligned}
< f, u_m > \ &= \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\, e^{-imx}\, dx \\
&= \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\, \frac{De^{-imx}}{-im}\, dx \\
&= \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-\pi}{-2im} - \frac{\pi}{-2im} \right) \ - \ \frac{1}{2im\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-imx}\, dx \\
&= \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{\pi}{im} \ - \ 0 \\
&= \ -\frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\, m}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que (convergence dans $L^2([0, 2\pi])$)

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{\pi - x}{2} \ &= \ \sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{+\infty} < f, u_m > \ u_m(x) \\
&= \ - \sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{+\infty} \frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\, m}\, \frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \ -\frac{i}{2} \sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{m} \\
&= \ -\frac{i}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{m} \ - \ \frac{i}{2} \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{e^{imx}}{m} \\
&= \ -\frac{i}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{m} \ - \ \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{-imx}}{-m} \\
&= \ -\frac{i}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{imx} - e^{-imx}}{m} \\
&= \ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{imx} - e^{-imx}}{2im} \\
&= \ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(mx)}{m}.
\end{aligned}$$

Cherchons à présent la valeur de la somme de la série des inverses des carrés des naturels. Pour cela, on utilise la relation

$$\|f\|^2 \ = \ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} | < f, u_m > |^2.$$

Vu ce qui précède on a déjà

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} | < f, u_m > |^2 \; = \; \sum_{m=-\infty,\ m\neq 0}^{+\infty} \frac{\pi}{2\,m^2} \; = \; \pi \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.$$

Par ailleurs,

$$\|f\|^2 \; = \; \int_0^{2\pi} \frac{(\pi - x)^2}{4}\, dx \; = \; \frac{1}{12} \Big[(x-\pi)^3 \Big]_0^{2\pi} \; = \; \frac{\pi^3}{6}.$$

Il s'ensuit que

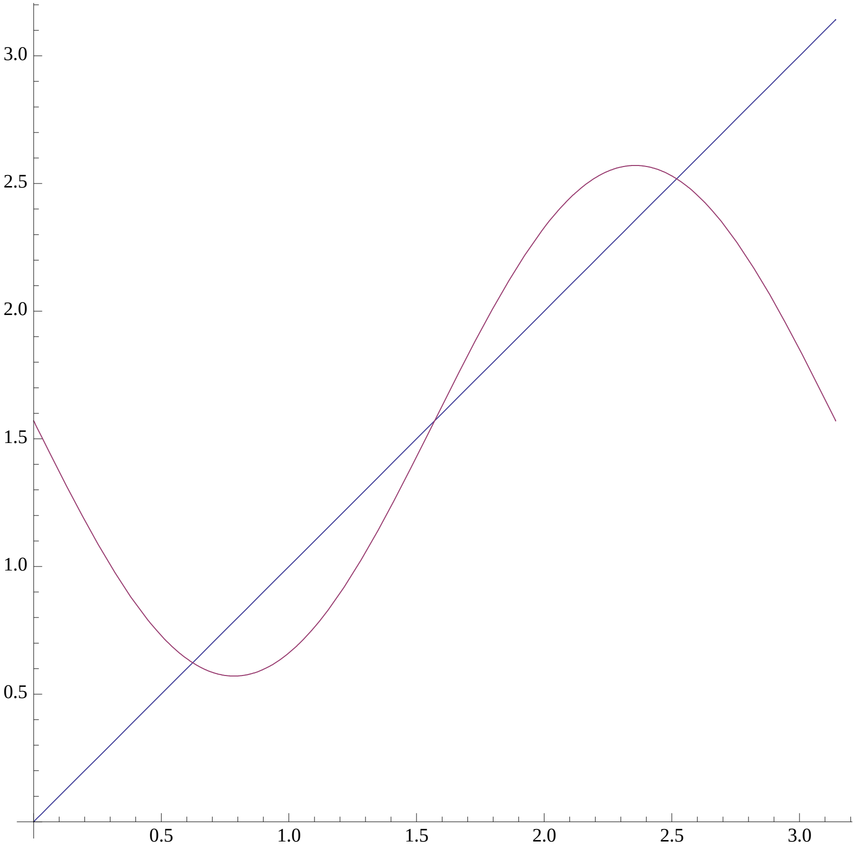
$$\pi \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \; = \; \frac{\pi^3}{6}$$

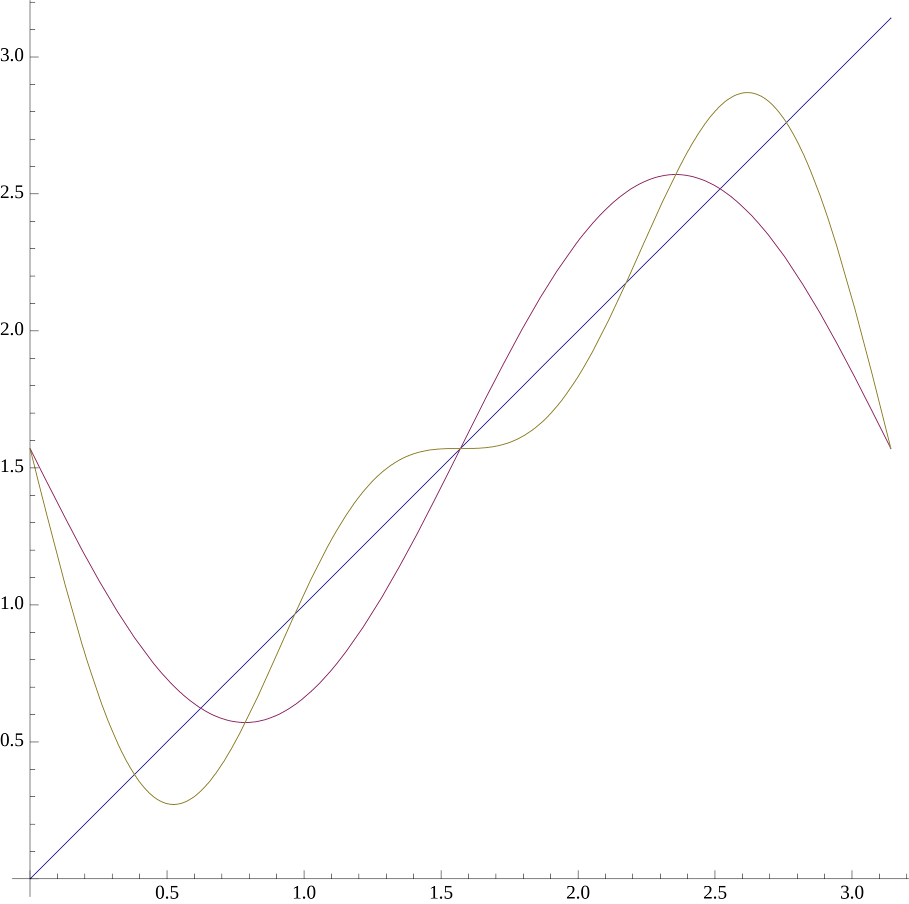
donc

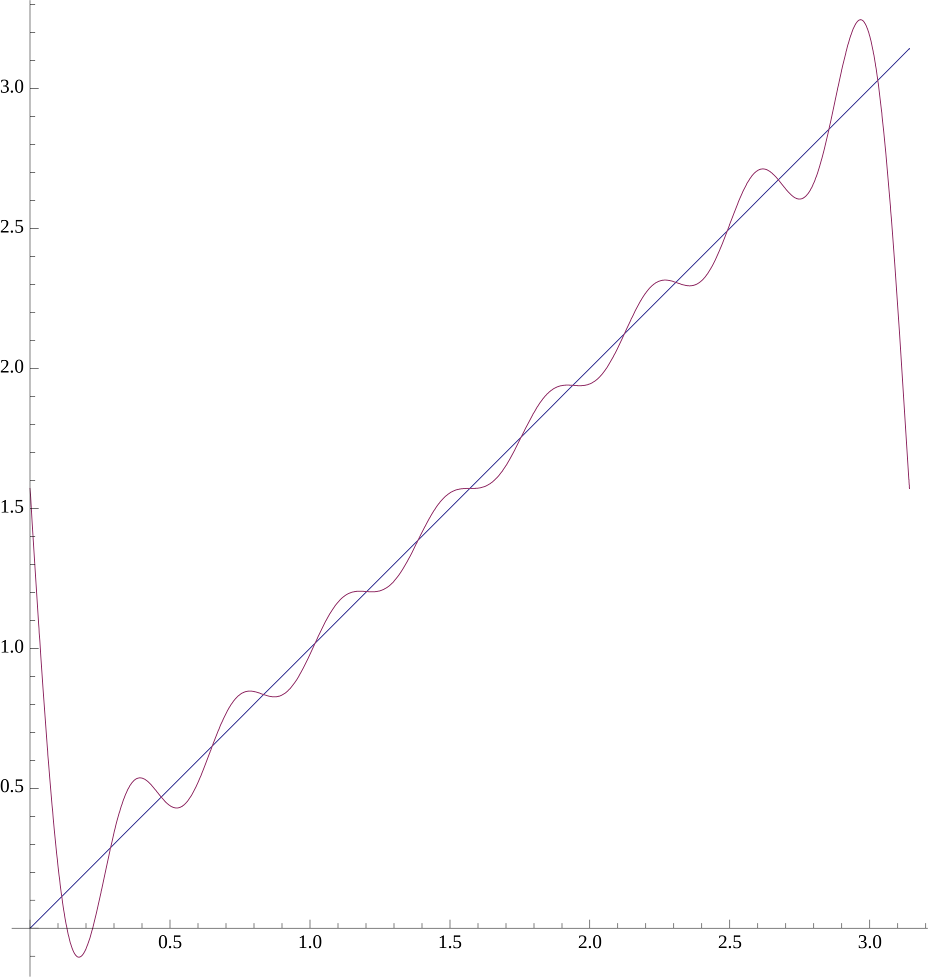
$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \; = \; \frac{\pi^2}{6}.$$

• **Phénomène de Gibbs**, voir via wikipedia et aussi slides. Des précisions seront données à l'occasion d'un prochain cours.

F. Bastin, 29 octobre 2020 (V1 : 271020)


3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0


3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0


3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0