Analyse II (Math0247)
2020-2021

A propos de l'extension du produit de composition (fin du cours du 12 octobre 2020)

Convention : Si h est une fonction définie (presque partout) sur $\mathbb{R}^n$, on note $[h]$ son support (presque partout). Il est immédiat de voir que $h = h\chi_{[h]}$.

*Définition des espaces L^p_{loc} et L^p_{comp}. Voir cours et syllabus.

*Propriété

Lorsque $p, q, r \in \{1, 2, \infty\}$ avec $(1/p) + (1/q) = 1 + (1/r)$ (avec convention), on a $\boxed{L^p_{comp} * L^q_{loc} \subset L^r_{loc}}$

Preuve. Soient $f \in L^p_{comp}$ et $g \in L^q_{loc}$. Si y est fixé, on a

$$f(y-x)\,g(x) \;=\; f(y-x)\,\chi_{[f]}(y-x)\,g(x) \;=\; f(y-x)\,\chi_{y-[f]}(x)\,g(x).$$

Cela étant, si $K \subset \mathbb{R}^n$ on a

$$f(y-x) \;=\; f(y-x)\,\chi_{[f]}(y-x) \;=\; f(y-x)\,\chi_{y-[f]}(x) \;=\; f(y-x)\,\chi_{K-[f]}(x), \quad y \in K$$

car si $x \in y-[f]$ alors $x \in K-[f]$ et si $x \notin y-[f]$ alors $y-x \notin [f]$ donc $f(y-x) = 0$. On obtient donc (x)

$$\begin{aligned} f(y-x)\,g(x) &= f(y-x)\,\chi_{y-[f]}(x)\,g(x) \\ &= f(y-x)\,\chi_{K-[f]}(x) \\ &= f(y-x)\,\left(g\chi_{K-[f]}\right)(x) \\ &= f(y-x)\,G(x) \end{aligned}$$

lorsque $y \in K$ et avec $G = g\chi_{K-[f]}$. Comme $[f]$ est compact, l'ensemble $K-[f]$ est également compact lorsque K est compact. Cela implique que $G \in L^q$ puisque $g \in L^q_{loc}$. Vu l'inclusion $L^p * L^q \subset L^r$, on a donc $f * G \in L^r$. Finalement, si $y \in K$, en intégrant les deux membres des égalités (x), on obtient

$$(f*g)(y) \;=\; (f*G)(y)$$

ou encore

$$(f*g)\,\chi_K \;=\; (f*G)\,\chi_K \;\in\; L^r.$$

On peut donc conclure que $f * g \in L^r_{loc}$.$\square$

F. Bastin, 14 octobre 2020 (V1 : 081020)