Analyse II (Math0247)
2020-2021

A propos du phénomène de Gibbs

Gibbs ...En bref ... Au niveau d'un point de discontinuité [1] de f, les sommes partielles $S_M(f)$ du développement en série trigonométrique de Fourier subissent une forte oscillation, une sorte de « sursaut ». Les images laissent soupçonner et le calcul montre effectivement que l'amplitude de ce sursaut tend vers une constante. Précisément, si la fonction a une discontinuité d'amplitude Δ, alors le « saut » en ordonnée des sommes partielles est de l'ordre de 17% de plus que Δ.

Enoncé relatif au phénomène de Gibbs.

Soit f une fonction périodique et localement dans L^2, dont les coefficients de Fourier c_m sont tels que $\sup_m m|c_m| < +\infty$ et qui possède un nombre fini de points de discontinuité, en chacun desquels elle admet une limite finie à gauche et à droite. Alors, en chacune de ces discontinuités x_0, il existe $x_M \to x_0+$ et $y_M \to x_0-$ tels que

$$\lim_{M\to+\infty} |S_M(f,x_M) - S_M(f,y_M)| = G\Delta$$

où G est la constante de Gibbs

$$G = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx \ (> 1.17)$$

et où

$$\Delta = |f(x_0+) - f(x_0-)|\,.$$

Voici une illustration, mais via internet vous en trouvez beaucoup d'autres ! (Remarque : ne pas oublier de considérer la fonction périodisée ; ici, il faut répéter le graphique de f (à savoir $f(x) = x,\ x \in [0,\pi]$) de façon périodique pour mieux visualiser)

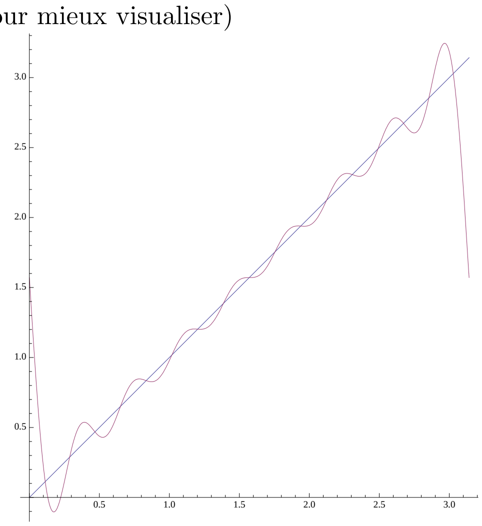

Illustration sur le cas de $f(x) = x$.

Soit le développement de $f : x \mapsto x$ en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([0,\pi])$, à savoir [2]

$$x = \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(2mx)}{m}.$$

1. d'un certain type
2. L'exemple du cours du jeudi 29/10/20 permet d'obtenir le résultat, pas besoin ICI de refaire le calcul

On pose

$$S_M(f,x)=\frac{\pi}{2}-\sum_{m=1}^{M}\frac{\sin(2mx)}{m},\quad M\in\mathbb{N}_0.$$

On a

$$\lim_{M\to+\infty}\int_0^\pi |S_M(f,x)-x|^2\,dx=0\quad(\text{convergence dans } L^2([0,\pi]))$$

$$\begin{aligned}\lim_{M\to+\infty}S_M(f,x) &= \frac{\pi}{2}-\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\sin(2mx)}{m}=x\quad\forall x\in]0,\pi[\\ \lim_{M\to+\infty}S_M(f,x) &= \frac{\pi}{2}-\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\sin(2mx)}{m}=\frac{\pi}{2}\quad\text{pour } x=0,x=\pi.\end{aligned}$$

Le phénomène de Gibbs décrit le comportement des sommes partielles $S_M(f)$ au voisinage des points de discontinuité (de la fonction f périodisée). Ici, les points considérés sont donc les multilpes entiers de π.

Ici on a directement

$$\Delta=|f(0+)-f(0-)|=\pi$$

et aussi (prouvé plus loin)

$$\begin{aligned}\lim_{M\to+\infty}S_M\left(f,-\frac{\pi}{2M}\right) &= \frac{\pi}{2}+\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}dx\\ \lim_{M\to+\infty}S_M\left(f,\frac{\pi}{2M}\right) &= \frac{\pi}{2}-\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}dx.\end{aligned}$$

Dès lors

$$\lim_{M\to+\infty}\left|S_M\left(f,\frac{\pi}{2M}\right)-S_M\left(f,-\frac{\pi}{2M}\right)\right|=2\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}dx\;=\;G\Delta$$

Il reste à montrer que

$$G\;=\;\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}dx\;>\;1.17$$

De fait, du développement

$$\sin x=\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},\quad x\in\mathbb{R}$$

on tire

$$\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}dx=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\int_0^\pi x^{2m}dx=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m\pi^{2m+1}}{(2m+1)!(2m+1)}.$$

Dès lors, quel que soit le naturel strictement positif M, on a (car[3] ...)

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}dx &= 2\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m\pi^{2m}}{(2m+1)!(2m+1)}\\ &= 2\sum_{m=0}^{M}\frac{(-1)^m\pi^{2m}}{(2m+1)!(2m+1)}+2\sum_{m=M+1}^{+\infty}\frac{(-1)^m\pi^{2m}}{(2m+1)!(2m+1)}\\ &\geq 2\sum_{m=0}^{M}\frac{(-1)^m\pi^{2m}}{(2m+1)!(2m+1)}-2\frac{\pi^{2(M+1)}}{(2M+3)!\;(2M+3)}.\end{aligned}$$

Si on note

$$RG(M)=2\sum_{m=0}^{M}\frac{(-1)^m\pi^{2m}}{(2m+1)!(2m+1)}-2\frac{\pi^{2(M+1)}}{(2M+3)!\;(2M+3)},$$

3. penser à $|a+b|\geq\big||a|-|b|\big|$ et à la majoration de la queue d'une série alternée

on a

$$RG(0) = 0.90338, RG(1) = 0.57868, RG(2) = 1.17357, RG(3) = 1.16776$$
$$RG(4) = 1.17896, RG(5) = 1.17893, RG(6) = 1.17898, RG(7) = 1.17898$$

Démontrons que

$$\begin{aligned}
\lim_{M\to+\infty} S_M\left(f, -\frac{\pi}{2M}\right) &= \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \\
\lim_{M\to+\infty} S_M\left(f, \frac{\pi}{2M}\right) &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.
\end{aligned}$$

Démontrons par exemple la seconde égalité sur la limite de $S_M(f)$. La première s'y ramène immédiatement. On a successivement

$$\begin{aligned}
S_M\left(f, \frac{\pi}{2M}\right) &= \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{M} \frac{\sin(\pi m/M)}{m} \\
&= \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{M} \frac{\sin(\pi m/M)}{m/M} \\
&= \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{M} \frac{\pi}{M} \frac{\sin(\pi m/M)}{\pi m/M} \\
&= \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{M} \frac{\pi}{M} F(x_m) \\
&= \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{M} (x_m - x_{m-1}) F(x_m)
\end{aligned}$$

avec

$$F(x) = \frac{\sin x}{x}$$

et $x_m = \pi m/M,\ m = 0, \ldots, M$. Dès lors en utilisant la définition de l'intégrale (de Riemann) pour le prolongement continu sur $[0, \pi]$ de F et le découpage $x_m = \pi m/M,\ m = 0, \ldots, M$ de $[0, \pi]$ on obtient

$$\lim_{M\to+\infty} S_M\left(f, \frac{\pi}{2M}\right) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi} F(x)dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Se rappeler aussi le résultat suivant [4], lequel donne des informations sur la convergence ponctuelle des séries trigonométriques de Fourier. On reviendra sur les diverses convergences dans un autre cours.

Pour toute fonction f de classe C_1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$, on a $f \in L^2([0, 2\pi])$ et

$$\lim_{M\to+\infty} S_M(f, x) = f(x)$$

en tout $x \in]0, 2\pi[$ où f est dérivable. De plus on a

$$\lim_{M\to+\infty} S_M(f, x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

4. Il existe également d'autres hypothèses sur f pour obtenir des résultats similaires concernant la convergence ponctuelle des séries trigonométriques de Fourier

en tout $x \in]0, 2\pi[$, *avec* $f(x+)$ =*limite à droite de* f *en* x *et avec* $f(x-)$ =*limite à gauche de* f *en* x *et*

$$\lim_{M \to +\infty} S_M(f, 0) = \lim_{M \to +\infty} S_M(f, 2\pi) \; = \; \frac{f(0^+) + f((2\pi)^-)}{2}$$

(Les $S_M(f, .)$ sont les sommes partielles du développement en série trigonométrique de Fourier de f)