

# Chapitre 6

## Intégrales remarquables

### 6.1 Intégrale de Poisson

Rappelons qu'au Théorème 4.5.2, nous avons obtenu la formule suivante connue sous le nom d'**Intégrale de Poisson**:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \forall a > 0.$$

De plus, au Paragraphe 5.1, nous en avons déduit les résultats suivants

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-b^2/(4a)}, \quad \forall a > 0, b \in \mathbb{R},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-(ax^2+b/x^2)} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}, \quad \forall a > 0, b \geq 0.$$

### 6.2 La fonction “Gamma” : $\Gamma$

*Remarque.* Pour tout  $n \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $e^{-x}x^{n-1}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ . De fait, cette fonction est continue sur  $]0, +\infty[$  et vérifie d'une part

$$e^{-1}x^{n-1} \leq e^{-x}x^{n-1} \leq x^{n-1}, \quad \forall x \in ]0, 1[,$$

alors que la fonction  $x^{n-1}$  est intégrable en  $0^+$  si et seulement si  $n > 0$ , et d'autre part

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} x^{n-1} = 0, \quad \forall n > 0. \square$$

**Définition.** La fonction “Gamma”  $\Gamma$  est définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx, \quad \forall n \in ]0, +\infty[;$$

on dit aussi qu'il s'agit de la *première intégrale eulérienne*.

Cette fonction  $\Gamma$  jouit de nombreuses propriétés fort intéressantes.

**Proposition 6.2.1** *Pour tout  $n \in ]0, +\infty[$ , on a  $\Gamma(n) > 0$ .  
On a notamment  $\Gamma(1) = 1$  et  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .*

*Preuve.* De fait, l'intégrand est une fonction strictement positive sur  $]0, +\infty[$ .  
De plus, il vient successivement

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$$

et, en recourant au changement de variable  $t = \sqrt{x}$  en (\*),

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{-1/2} dx \stackrel{(*)}{=} 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}. \blacksquare$$

**Proposition 6.2.2** *La fonction  $\Gamma$  appartient à  $\mathcal{C}_\infty(]0, +\infty[)$  et, pour tout  $k \in \mathbb{N}_0$  et tout  $n \in ]0, +\infty[$ , on a*

$$D^k \Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} (\ln(x))^k dx.$$

*Preuve.* Cela résulte aussitôt du théorème de dérivation des intégrales paramétriques car

- a) pour tout  $x > 0$ , on a  $e^{-x} x^{n-1} \in \mathcal{C}_\infty(]0, +\infty[)$ ,
- b) pour tout compact  $K$  de  $]0, +\infty[$  et tout  $k \in \mathbb{N}_0$ , on a

$$\sup_{n \in K} |D_n^k(e^{-x} x^{n-1})| = \left( \sup_{n \in K} x^{n-1} \right) e^{-x} |\ln(x)|^k.$$

Or il existe  $a \in ]0, 1[$  et  $b \in ]1, +\infty[$  tels que  $K \subset [a, b]$ ; il vient donc

$$\sup_{n \in K} x^{n-1} = x^{a-1} \chi_{]0, 1[} + x^{b-1} \chi_{[1, +\infty[}(x).$$

Pour conclure, il suffit alors de vérifier directement que la fonction

$$(x^{a-1} \chi_{]0, 1[}(x) + x^{b-1} \chi_{[1, +\infty[}(x)) e^{-x} |\ln(x)|^k$$

est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .  $\blacksquare$

**Théorème 6.2.3 (propriété fondamentale)** *On a*

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad \forall n \in ]0, +\infty[.$$

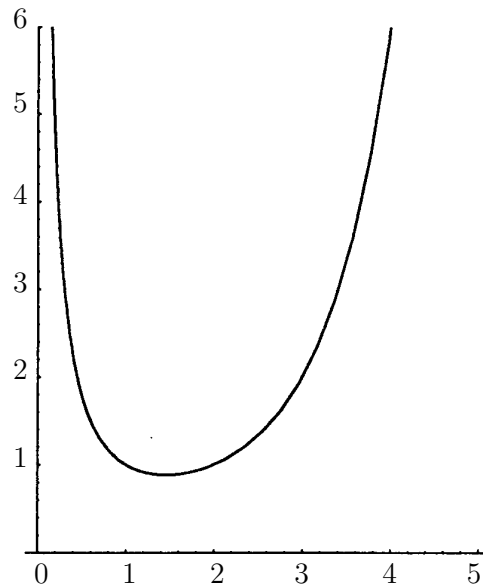
*En particulier, pour tout entier  $m \in \mathbb{N}_0$ , il vient*

$$\Gamma(m+1) = m! \quad \text{et} \quad \Gamma(m+1/2) = \frac{(2m)!}{2^{2m} m!} \sqrt{\pi}.$$

On dit que la fonction  $\Gamma$  interpole de manière  $\mathcal{C}_\infty$  les valeurs de  $m!$

*Preuve.* Cela résulte aussitôt du théorème d'intégration par parties car il vient successivement

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = - \int_0^{+\infty} (De^{-x}) x^n dx \\ &= -e^{-x} x^n \Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = n\Gamma(n). \blacksquare\end{aligned}$$



**Proposition 6.2.4** *On a*

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} n\Gamma(n) = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow 0^+} \Gamma(n) = +\infty. \blacksquare$$

**Théorème 6.2.5 (Formule de Stirling)** *On a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(n)}{e^{-n} n^n \sqrt{2\pi/n}} = 1$$

donc bien sûr  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma(n) = +\infty$  mais aussi, par exemple, les formules suivantes:

a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(n+r)}{n^r \Gamma(n)} = 1, \quad \forall r > 0.$

$$\text{b) } \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(m+p)!}{m! m^p} = 1, \quad \forall p \in \mathbb{N}_0,$$

$$\text{c) Formule de Wallis: } \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2m)} \sqrt{m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

*Preuve.* Etablissons d'abord la formule de Stirling. Si nous effectuons le changement de variable linéaire  $x = n + \sqrt{n}y$  dans le calcul de  $\Gamma(n)$ , il vient

$$\frac{\Gamma(n+1)}{e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}y + n \ln(1+y/\sqrt{n})} dy.$$

La conclusion résulte alors du théorème de la convergence majorée:

a) pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty, n > y^2} e^{-\sqrt{n}y + n \ln(1+y/\sqrt{n})} = e^{-y^2/2}$$

car la fonction exponentielle est continue sur  $\mathbb{R}$ , car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty, n > y^2} (-\sqrt{n}y + n \ln(1+y/\sqrt{n})) = \lim_{n \rightarrow +\infty, n > y^2} \frac{-y/\sqrt{n} + \ln(1+y/\sqrt{n})}{1/n}$$

est égal à

$$y^2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t + \ln(1+t)}{t^2}$$

si on pose  $t = y/\sqrt{n}$  et car on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t + \ln(1+t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t}{2t(1+t)} = -\frac{1}{2}$$

en recourant au théorème de l'Hospital,

b) de  $\int t/(1+t) dt = t - \ln(1+t)$ , on tire de suite

$$-\sqrt{n}y + n \ln(1+y/\sqrt{n}) = -n \int_0^{y/\sqrt{n}} \frac{t}{1+t} dt$$

pour tout  $y \in \mathbb{R}$  et tout  $n > 0$ . Cela étant, il vient

$$n \int_0^{y/\sqrt{n}} \frac{t}{1+t} dt \geq n \int_0^{y/\sqrt{n}} \frac{t}{1+y/\sqrt{n}} dt = \frac{y^2}{2(1+y/\sqrt{n})}$$

pour tout  $y > 0$  et

$$n \int_0^{y/\sqrt{n}} \frac{t}{1+t} dt \geq n \int_0^{y/\sqrt{n}} t dt = \frac{y^2}{2}$$

pour tout  $y \in ]-\sqrt{n}, 0[$ . Cela étant, la majoration

$$e^{-\sqrt{n}y+n \ln(1+y/\sqrt{n})} \chi_{]-\sqrt{n}, +\infty[}(y) \leq e^{-y^2/2} \chi_{]-\infty, 0[}(y) + e^{-y^2/(2+2y/\sqrt{n})} \chi_{]0, +\infty[}(y)$$

a lieu sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $n \geq 1$ . Or cette dernière majorante est bien sûr une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

Cela étant,

a) résulte aussitôt de

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(n+r)}{n^r \Gamma(n)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n-r} (n+r)^{n+r} \sqrt{2\pi/(n+r)}}{n^r e^{-n} n^n \sqrt{2\pi/n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{r+n} \sqrt{\frac{n}{n+r}} e^{-r} = 1. \end{aligned}$$

b) est direct mais résulte aussi de

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(m+p+1)}{\Gamma(m+1)m^p} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(m+1)^p \Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1)m^p} = 1.$$

c) résulte aussitôt de

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2m)} \sqrt{m} &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(2m+1) \sqrt{m}}{2^{2m} \Gamma(m+1) \Gamma(m+1)} \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2m} (2m)^{2m} \sqrt{4\pi m} \sqrt{m}}{2^{2m} e^{-2m} m^{2m} 2\pi m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \blacksquare \end{aligned}$$

**Théorème 6.2.6 (formule de Gauss)** Pour tous  $n > 0$  et  $m \in \mathbb{N}_0$ , on a

$$m^{mn} \Gamma(n) \Gamma\left(n + \frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(n + \frac{m-1}{m}\right) = (2\pi)^{(m-1)/2} \sqrt{m} \Gamma(mn).$$

En particulier, on a la **formule de duplication de Legendre**:

$$\Gamma(n) \Gamma(n+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \Gamma(2n), \quad \forall n > 0.$$

*Preuve.* Posons

$$V(m, n) = m^{mn-1/2} \frac{\Gamma(n) \Gamma\left(n + \frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(n + \frac{m-1}{m}\right)}{\Gamma(mn)}.$$

On vérifie directement qu'on a alors  $V(m, n + 1) = V(m, n)$  pour tous  $n > 0$  et  $m \in \mathbb{N}_0$ , donc  $V(m, n + p) = V(m, n)$  pour tous  $n > 0$  et  $m, p \in \mathbb{N}_0$ . Cela étant,  $V(m, n)$  est successivement égal à

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ p \in \mathbb{N}_0}} V(m, n + p) &= \lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ p \in \mathbb{N}_0}} \frac{m^{m(n+p)-1/2} \Gamma(n+p) \cdots \Gamma(n+p + (m-1)/m)}{\Gamma(m(n+p))} \\
 &\stackrel{(*)}{=} \lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ p \in \mathbb{N}_0}} \frac{m^{m(n+p)-1/2} n^p \Gamma(n) \cdots n^{p+(m-1)/m} \Gamma(n)}{(mn)^{mp} \Gamma(mn)} \\
 &= \lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ p \in \mathbb{N}_0}} m^{mn-1/2} n^{(m-1)/2} \frac{(\Gamma(n))^m}{\Gamma(mn)} \\
 &\stackrel{(**)}{=} \lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ p \in \mathbb{N}_0}} m^{mn-1/2} \frac{n^{(m-1)/2} e^{-nm} n^{nm} (2\pi/n)^{m/2}}{e^{-mn} (mn)^{mn} \sqrt{2\pi/(mn)}} = (2\pi)^{(m-1)/2}
 \end{aligned}$$

ce qui suffit pour conclure (en (\*), on utilise la première formule de la propriété précédente; en (\*\*), on utilise la formule de Stirling).

La formule de duplication de Legendre n'est quant à elle qu'une autre écriture de la formule de Gauss pour  $m = 2$ . ■

### 6.3 La fonction "Beta" : $B$

*Remarque.* Pour tout  $(m, n) \in ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ ,  $x^{m-1}(1-x)^{n-1}$  est une fonction intégrable sur  $]0, 1[$ . Cela résulte aussitôt des critères pratiques d'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

**Définition.** La fonction "Beta"  $B$  est définie selon

$$B: ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[; (m, n) \mapsto \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

on dit aussi qu'il s'agit de la *deuxième intégrale eulérienne*.

Voici quelques propriétés marquantes de cette fonction.

**Proposition 6.3.1** Pour tout  $(m, n) \in ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , on a

- a)  $B(m, n) > 0$ ,
- b)  $B(m, n) = B(n, m)$ ,
- c)  $B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ .

*Preuve.* a) est trivial.

b) De fait, le changement de variable linéaire  $y = 1 - x$  donne aussitôt

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = - \int_1^0 (1-y)^{m-1}y^{n-1} dy.$$

c) Comme les fonctions  $e^{-x}x^{m-1}$  et  $e^{-y}y^{n-1}$  sont intégrables sur  $]0, +\infty[$ , la fonction  $e^{-x-y}x^{m-1}y^{n-1}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  et son intégrale vaut  $\Gamma(m)\Gamma(n)$ . On peut aussi évaluer cette intégrale en recourant au changement de variable

$$\begin{cases} x = \xi(1-\eta) \\ y = \xi\eta \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = x+y \\ \eta = y/(x+y) \end{cases}$$

régulier d'ordre infini entre  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  et  $]0, +\infty[ \times ]0, 1[$ . Il vient

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-\xi}\xi^{m+n-1} d\xi \cdot \int_0^1 (1-\eta)^{m-1}\eta^{n-1} d\eta = \Gamma(m+n) \cdot B(m, n). \blacksquare$$

*Remarque.* La formule obtenue en c) permet d'avoir la valeur de  $B(m, n)$  pour toutes les valeurs entières et demi-entières de  $m$  et  $n$ . Voici un autre cas où la valeur de  $B(m, n)$  est connue.

**Théorème 6.3.2 (formule d'Euler)** Pour tout  $\theta \in ]0, 1[$ ,

$$B(\theta, 1-\theta) = \Gamma(\theta) \cdot \Gamma(1-\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\theta\pi)}.$$

*Preuve.* La première égalité résulte de la formule c) de la Proposition précédente car on a  $\Gamma(1) = 1$ .

Pour obtenir la deuxième égalité, il suffit d'effectuer le changement de variable  $x = y/(1+y)$  dans l'expression intégrale de  $B(\theta, 1-\theta)$ : il vient

$$\int_0^1 x^{\theta-1}(1-x)^{-\theta} dx = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\theta-1}}{(1+y)^{\theta-1}} \frac{1}{(1+y)^{-\theta}} \frac{dy}{(1+y)^2}.$$

Pour conclure, établissons la troisième égalité. On prouve d'abord que

$$e^{i\lambda\theta} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1+e^{i\lambda}x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1+x} dx, \quad \forall \lambda \in ]-\pi, \pi[.$$

Comme  $e^{i\lambda\theta}$  appartient à  $\mathcal{C}_1(\mathbb{R})$  et comme

a) on a  $x^{\theta-1}/(1+e^{i\lambda}x) \in \mathcal{C}_1(]-\pi, \pi[)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,

- b) on a  $x^{\theta-1}/(1 + e^{i\lambda x}) \in L^1(]0, +\infty[)$  pour tout  $x \in ]-\pi, \pi[$ ,  
c) pour tout compact  $K \subset ]-\pi, \pi[$ ,

$$\sup_{\lambda \in K} \left| D_\lambda \frac{x^{\theta-1}}{1 + e^{i\lambda x}} \right| = \sup_{\lambda \in K} \frac{x^\theta}{x^2 + 2x \cos(\lambda) + 1}$$

est majoré sur  $]0, +\infty[$  par

$$\frac{x^\theta}{x^2 - 2x \cos(\varepsilon) + 1} \in L^1(]0, +\infty[)$$

si on choisit  $\varepsilon \in ]0, \pi[$  tel que  $K \subset ]-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon[$ ,  
la fonction

$$e^{i\lambda\theta} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1 + e^{i\lambda x}} dx \quad (*)$$

est continûment dérivable par rapport à  $\lambda$  sur  $] - \pi, \pi[$  et de dérivée égale à

$$\begin{aligned} & e^{i\lambda\theta} \left( i\theta \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1 + e^{i\lambda x}} dx - ie^{i\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{x^\theta}{(1 + e^{i\lambda x})^2} dx \right) \\ &= e^{i\lambda\theta} \left( i\theta \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1 + e^{i\lambda x}} dx + i \int_0^{+\infty} x^\theta D_x \frac{1}{1 + e^{i\lambda x}} dx \right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire à 0 en intégrant par parties dans la toute dernière intégrale. Cette fonction (\*) est donc constante sur  $] - \pi, \pi[$  et l'égalité annoncée provient de sa valeur en 0.

Pour tout  $\lambda \in ]-\pi, \pi[$ , on a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1 + e^{i\lambda x}} dx = e^{-i\lambda\theta} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1 + x} dx$$

et par conséquent

$$\sin(\lambda) \int_0^{+\infty} \frac{x^\theta}{x^2 + 2x \cos(\lambda) + 1} dx = \sin(\lambda\theta) \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1 + x} dx$$

en égalant les parties imaginaires des deux membres de cette égalité.

Cela étant, pour conclure, il suffit de prouver que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pi^+} \sin(\lambda) \int_0^{+\infty} \frac{x^\theta}{x^2 + 2x \cos(\lambda) + 1} dx = \pi.$$

Or, pour tout  $\lambda \in ]0, \pi[$ ,

$$\sin(\lambda) \int_0^{+\infty} \frac{x^\theta}{x^2 + 2x \cos(\lambda) + 1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\lambda) x^\theta}{(x + \cos(\lambda))^2 + \sin^2(\lambda)} dx$$



est égal à

$$\int_{\cot g(\lambda)}^{+\infty} (y \sin(\lambda) - \cos(\lambda))^\theta \frac{dy}{1+y^2}$$

en recourant au changement de variable linéaire  $x = y \sin(\lambda) - \cos(\lambda)$ . Il suffit alors d'appliquer le théorème de la convergence majorée car on a

$$|y \sin(\lambda) - \cos(\lambda)|^\theta \leq (|y| + 1)^\theta \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

et car la fonction  $(|y| + 1)^\theta / (1 + y^2)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . ■

**Proposition 6.3.3** *Pour tout  $m \in ]0, +\infty[$ , on a*

$$B(m, m) = 2^{-2m+1} B(m, 1/2).$$

*Preuve.* De fait, on a successivement

$$B(m, m) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(m)}{\Gamma(2m)} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(m)\sqrt{\pi}}{\Gamma(m)\Gamma(m+1/2)2^{2m-1}} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(1/2)}{\Gamma(m+1/2)} 2^{-2m+1}. \blacksquare$$

## 6.4 Autres intégrales eulériennes

L'évaluation de nombreuses intégrales se ramène aux fonctions  $\Gamma$  et  $B$ .

**Proposition 6.4.1** a) *Pour tous  $m > 0$ ,  $n > -1$  et  $a > 0$ ,*

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^m} x^n dx = \frac{1}{m} \Gamma\left(\frac{1+n}{m}\right) a^{-(n+1)/m}.$$

b) *Pour tous  $m > -1$ ,  $n > -1$ ,  $p > 0$  et  $a > 0$ ,*

$$\int_0^a x^m (a^p - x^p)^n dx = \frac{1}{p} B\left(n+1, \frac{m+1}{p}\right) a^{m+np-1}.$$

c) *Pour tous  $m > -1$  et  $n > -1$ ,*

$$\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx = (b-a)^{m+n+1} B(m+1, n+1).$$

d) *Pour tous  $m > -1$ ,  $n > -1$  et  $c \notin [a, b]$ ,*

$$\int_a^b \frac{(x-a)^m (b-x)^n}{|x-c|^{m+n+2}} dx = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{|a-c|^{n+1} |b-c|^{m+1}} B(m+1, n+1).$$

e) Pour tous  $m > -1$ ,  $p > 0$ ,  $n > (m+1)/p$ ,  $a > 0$  et  $b > 0$ ,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{(ax^p + b)^n} dx = \frac{b^{(m+1)/p-n}}{a^{(m+1)/p}} \cdot B\left(\frac{m+1}{p}, n - \frac{m+1}{p}\right).$$

f) Pour tous  $m > -1$  et  $n > -1$ ,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m(\theta) \cos^n(\theta) d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

g) Pour tous  $m > -1$ ,  $n > -1$ ,  $a > 0$  et  $b > 0$ ,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^m(\theta) \sin^n(\theta)}{(a \cos^2(\theta) + b \sin^2(\theta))^{(m+n+2)/2}} d\theta = \frac{B((m+1)/2, (n+1)/2)}{2a^{(m+1)/2} b^{(n+1)/2}}.$$

*Preuve.* Pour s'en assurer, il suffit d'effectuer le changement de variable:

a)  $ax^m = y$ ,

b)  $x^p = a^p y$ ,

c)  $x = a + (b-a)y$ ,

d)  $x = \frac{a(b-c) + c(a-b)y}{(b-c) + (a-b)y}$ ,

e)  $\frac{b}{ax^p + b} = y$ ,

f)  $\sin^2(\theta) = y$ ,

g)  $\sin^2(\theta) = \frac{ax}{(a-b)x + b}$ . ■