Année académique 2023-2024

Analyse MATH0247

Françoise Bastin
Version 19 décembre 2022 (V1 : 240421)

Introduction

Après une courte liste de notions fondamentales qu'il importe de maîtriser pour aborder le contenu de ce cours (partie intitulée Rappels), le chapitre 1 présente un essentiel concernant les intégrales eulériennes Γ et B. C'est l'occasion de retravailler avec des intégrales paramétriques, entre autre.

Ensuite vient le chapitre 2, consacré aux notions de convergence simple (ou ponctuelle) et uniforme d'une suite de fonctions. D'autres notions de convergence de suites de fonctions seront étudiées dans d'autres chapitres. *De nombreuses fonctions apparaissent naturellement comme des limites d'autres fonctions plus simples. C'est le cas par exemple de la fonction exponentielle, que l'on peut définir par l'une des deux formules suivantes :*

$$\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m, \qquad \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^m}{m!}$$

C'est aussi le cas pour des problèmes plus théoriques, comme lorsque l'on construit des solutions d'équations (par exemple différentielles) : on construit souvent par récurrence des solutions approchées qui ≪ convergent ≫ (sens à préciser selon le contexte bien sûr !) *vers une solution exacte. Ainsi, les problèmes suivants sont importants : quel sens peut-on donner à la convergence d'une suite de fonctions ? Quelles sont les propriétés qui sont ainsi préservées ?* [1]

Le chapitre 3 débute par une brève présentation des notions d'espaces vectoriels normés, pré-hilbertiens, de Banach et de Hilbert. Ensuite, ce sont les espaces de Banach des fonctions intégrables, bornées presque partout qui sont étudiés, puis l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable.

L'outil d'analyse du signal intitulé ≪ produit de composition ≫ (ou convolution) est traité au chapitre 4.

Les chapitres 5 et 6 sont ensuite consacrés à l'étude de la transformation de Fourier des fonctions intégrables et des fonctions de carré intégrable, indispensable outil de la physique notamment puisque ces transformées modélisent les notions de spectre, d'énergie, etc.

Enfin le chapitre 7 présente la notion de suite orthonormée (totale) dans un espace de Hilbert, de développement en série avec ces suites. Une attention toute particulière est portée aux séries trigonométriques de Fourier, lesquelles interviennent dans de multiples domaines jouxtant notamment la théorie du signal.

Ces notes sont provisoires ; elles doivent être complétées comme le lecteur s'en apercevra lorsqu'il découvrira les ≪ A COMPLETER ≫.

1. Le texte en italique de ce paragraphe est tiré de la page web à l'adresse http ://www.bibmath.net/dico/index.php ?action=affiche&quoi=./c/cvu.html

Documents de référence

— Samuel Nicolay : syllabus et documents pdf relatifs aux cours d'analyse de première année (bachelier en sciences physiques), disponible via la page web de S. Nicolay.
— Jean Schmets : *Analyse mathématique. Introduction aux espaces fonctionnels.* Université de Liège. Le syllabus complet est disponible via les archives indiquées dans les pages web relatives au cours MATH0247, Analyse, 2BP ; des extraits sont aussi directement récupérables via les pages web relatives au cours MATH0247
— Listes d'exercices (les listes de plusieurs années sont disponibles sur la page web relative au cours)
— Le présent syllabus.

FB,
Version 19 décembre 2022 (V1 : 240421)

Table des matières

Rappels

Il est fondamental d'avoir une bonne connaissance

— des séries (numériques),
— des résultats concernant la dérivation des fonctions composées
— du calcul intégral : définitions, cas fondamentaux, critères d'intégrabilité, techniques d'intégration, théorème de Lévi (ou convergence monotone), théorème de Lebesgue (ou convergence majorée), théorème de Tonelli, théorème de Fubini
— du théorème de dérivation des intégrales paramétriques.

Les énoncés complets des théorèmes de Fubini, Tonelli, Lévi et Lebesgue figurent plus loin dans ce syllabus (dans le chaputre 3).

Il importe aussi de se rappeler la valeur des intégrales suivantes

$$\int_0^{+\infty} \cos(bx)\ e^{-ax^2}\ dx \ = \ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-b^2/4a}, \quad b \in \mathbb{R},\ a \in]0,+\infty[.$$

Rappelons aussi la définition d'un ensemble compact (définition générale, quelle que soit la topologie) ainsi que sa caractérisation au moyen de suites. Pour celle-ci, nous nous plaçons dans $\mathbb{R}^n$, mais elle peut être étendue dans le cas d'espaces métriques.

Définition. *Un ensemble K d'un espace topologique X est un sous-ensemble de X pour lequel de tout recouvrement de K par des ouverts, on peut extraire un recouvrement fini.*

Cela signifie donc que si les ouverts Ω_j $(j \in J)$ sont tels que

$$K \subset \bigcup_{j \in J} \Omega_j,$$

alors parmi ces Ω_j, il en existe un nombre fini Ω_{j_m} $(m = 1, \dots M)$ tels que

$$K \subset \bigcup_{m=1,\dots,M} \Omega_{j_m}.$$

Caractérisation [Bolzano Weierstrass]. *Cas de $\mathbb{R}^n$.*

Les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) L'ensemble K est compact.
(2) L'ensemble K est borné et fermé˙ (3) De toute suite de K on peut extraire une sous-suite convergeant vers un élément de K.

Chapitre 1

Intégrales eulériennes

Les fonctions eulériennes classiques, à savoir les fonctions définies par des intégrales paramétriques Γ et B (voir suite de ce chapitre) sont d'une grande importance en analyse. Par exemple, la fonction Γ généralise les factorielles des naturels, ce qui permet à des expressions statistiques discrètes de pouvoir se généraliser dans le ≪ continu ≫ (ce qui veut dire ici en utilisant des fonctions de variables réelles plutôt que des suites) et d'ainsi apporter un outil d'étude puissant. La fonction B, quant à elle, intervient dans l'expression de différences finies, lesquelles sont étudiées en analyse un peu comme les opérateurs différentiels.

Propriété(s) 1.0.1. *(1) La fonction $x \mapsto e^{-x}\, x^{n-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $n > 0$.*

(2) La fonction $x \mapsto x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $m > 0$ et $n > 0$.

Preuve. Notons tout d'abord que les fonctions données sont continues sur les ensembles considérés.

(1) Si $n \geq 1$, la fonction est même continue sur $[0,+\infty[$ et après multiplication par x^2, on a une convergence vers 0 en $+\infty$; on a donc l'intégrabilité voulue.

Si $0 < n < 1$, l'intégrabilité en $+\infty$ ne pose pas non plus de problème car, par exemple $x^{n-1}\, e^{-x} \leq e^{-x}$ lorsque $x \geq 1$ et l'exponentielle $x \mapsto e^{-x}$ est évidemment intégrable en $+\infty$. Enfin, on a aussi l'intégrabilité en 0 car $e^{-x}\, x^{n-1} \leq x^{n-1}$ pour tout $x > 0$ et $x \mapsto x^{n-1}$ est intégrable en 0.

Réciproquement, si la fonction est intégrable alors $n > 0$. De fait, on a $e^{-x}x^{n-1} \geq x^{n-1}/2$ au voisinage de 0 et $x \mapsto x^{n-1}$ est intégrable en 0 si et seulement si $1-n < 1$ c'est-à-dire $n > 0$.

(2) Ici, c'est encore plus simple : on a

$$0 < x^{m-1}\,(1-x)^{n-1} \leq Cx^{m-1} \quad \text{au voisinage de } 0^+$$

et

$$0 < x^{m-1}\,(1-x)^{n-1} \leq C'(1-x)^{n-1} \quad \text{au voisinage de } 1^-$$

dès lors on a bien l'intégrabilité lorsque $n, m > 0$.

Réciproquement, comme on a

$$x^{m-1}\,(1-x)^{n-1} \geq Cx^{m-1} \quad \text{au voisinage de } 0^+$$

et

$$x^{m-1}\,(1-x)^{n-1} \geq C'(1-x)^{n-1} \quad \text{au voisinage de } 1^-$$

l'intégrabilité de $x \mapsto x^{m-1}(1-x)^{n-1}$ en 0^+ implique $m > 0$ et son intégrabilité en 1^- implique $n > 0$. $\square$

Définition 1.0.2. *La fonction Γ est définie par*

$$\Gamma(n) \; = \; \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{n-1}\, dx, \quad n > 0$$

et la fonction B est définie par

$$B(m,n) \; = \; \int_0^1 x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}\, dx$$

Propriété(s) 1.0.3. *On a les égalités suivantes*

(1) $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

(2) $\Gamma(n+1) \; = \; n\,\Gamma(n)$ *pour tout* $n > 0$

(3) $\Gamma(n+1) \; = \; n!$ *pour tout naturel strictement positif* n

(4) $B(m,n) \; = \; B(n,m)$ *pour tous* $m, n > 0$

Preuve. (1) C'est un simple calcul. On a

$$\Gamma(1) \; = \; \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx \; = \; -\int_0^{+\infty} De^{-x}\, dx \; = \; 1$$

et

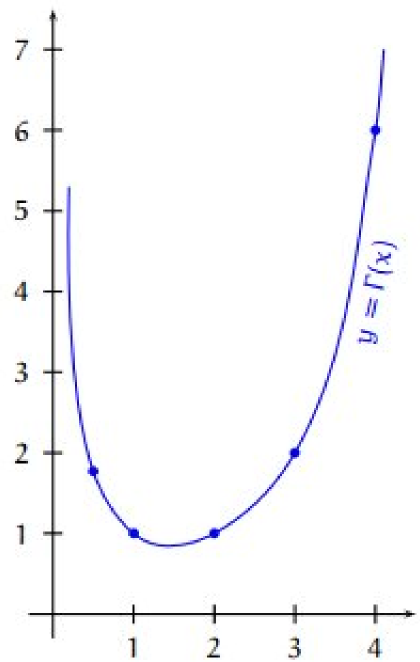
$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \; &= \; \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{-1/2}\, dx \\ &= \; \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, t^{-1}\, 2t\, dt \\ &= \; 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \\ &= \; \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

(2) Ici aussi c'est un simple calcul d'intégration par parties

$$\Gamma(n+1) \; = \; \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^n\, dx \; = \; -\int_0^{+\infty} De^{-x}\, x^n\, dx \; = \; \int_0^{+\infty} e^{-x}\, nx^{n-1}\, dx \; = \; n\,\Gamma(n).$$

(3) résulte directement de (2) et (1)

(4) s'obtient immédiatement par exemple en utilisant le changement de variable linéaire $g(x) = 1 - x, \; x \in]0,1[$. $\square$



Proposition 1.0.4 (Formule de Stirling)**.** *On a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{n^n\, e^{-n}\,\sqrt{2\pi n}} \;=\; 1.$$

Preuve. Voir les notes de J. Schmets par exemple. □

Propriété(s) 1.0.5. *Quel que soit $\theta \in]0,1[$, on a*

$$B(\theta, 1-\theta) \;=\; \frac{\pi}{\sin(\theta\,\pi)}.$$

Preuve. Voir les notes de J. Schmets par exemple. □

Propriété(s) 1.0.6. *Le lien entre Γ et B est*

$$\Gamma(n)\,\Gamma(m) \;=\; \Gamma(m+n)\,B(m,n) \quad \forall n, m > 0$$

Preuve. On obtient cette égalité en faisant un changement de variables dans une intégrale double comme suit. On a

$$\Gamma(n)\,\Gamma(m) \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-x}\,x^{n-1}\,dx \times \int_0^{+\infty} e^{-y}\,y^{m-1}\,dy \;=\; \iint_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} e^{-(x+y)}\,x^{n-1}\,y^{m-1}\,dx\,dy$$

On utilise alors la fonction $G = (g_1, g_2)$ définie par

$$g_1(x,y) \;=\; x+y, \quad g_2(x,y) = \frac{x}{x+y} \quad (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$$

avec g_1, g_2 indéfiniment continûment dérivables sur $A =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$; elle s'inverse comme suit

$$\left\{\begin{array}{l} s = g_1(x,y) = x+y \\ t = g_2(x,y) = x/(x+y) \end{array}\right. \quad (x,y)\in A \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x = ts \\ y = s - x = s - st = s(1-t) \end{array}\right. \quad (s,t) \in]0,+\infty[\times]0,1[$$

avec $h_1 : (s,t) \mapsto ts$ et $h_2 \mapsto s - st$ indéfiniment continûment dérivables sur $]0,+\infty[\times]0,1[$. Cela étant, on a

$$\left| D_s h_1(s,t)\, D_t h_2(s,t) \;-\; D_t h_1(s,t)\, D_s h_2(s,t) \right| \;=\; \left| t\,(-s) \;-\; s\,(1-t) \right| \;=\; |-s| \;=\; s$$

donc

$$\begin{aligned} \Gamma(n)\,\Gamma(m) &= \iint_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} e^{-(x+y)}\; x^{n-1}\, y^{m-1}\; dx\, dy \\ &= \iint_{]0,+\infty[\times]0,1[} e^{-s}\; t^{n-1}\; s^{n-1}\; s^{m-1}\,(1-t)^{m-1}\; s\; ds\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-s}\; s^{n+m-1}\; ds \times \int_0^1 t^{n-1}\,(1-t)^{m-1}\; dt \\ &= \Gamma(m+n)\, B(m,n) \end{aligned}$$

□

Exercice 1.0.7. *On a*

$$\Gamma \in C_\infty(]0,+\infty[), \quad B \in C_\infty(]0,+\infty[\times]0,+\infty[)$$

et ces intégrales sont « dérivables sous le signe d'intégration ».

Chapitre 2

Convergences ponctuelle (ou simple) et uniforme

2.1 Définitions, notations, exemples, critère de Cauchy

Pour une introduction et cerner la différence entre les deux convergences, voir par exemple http ://www.bibmath.net/dico/index.php ?action=affiche&quoi=./c/cvu.html
rubrique analyse, convergence simple, uniforme.

Passons alors à la définition et aux notations utilisées.

Définition 2.1.1. *Soit* $A \subset \mathbb{R}^n$ *et soit* f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ *une suite de fonctions définies sur* A.
(a) On dit que la suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ *converge ponctuellement (ou simplement) sur* A *s'il existe une fonction* f *définie sur* A *telle que* $\lim_{m\to+\infty} f_m(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in A$ *ou encore*

$$\lim_{m\to+\infty} |f_m(x) - f(x)| \; = \; 0 \quad \forall x \in A.$$

Dans ce cas on utilise souvent la notation

$$f_m \underset{A}{\to} f$$

(b) On dit que la suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ *converge uniformément sur* A *s'il existe une fonction* f *définie sur* A *telle que*

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{x\in A} |f_m(x) - f(x)| \; = \; 0.$$

Dans ce cas on utilise souvent la notation

$$f_m \underset{A}{\rightrightarrows} f$$

Pour des exemples, nous renvoyons au cours enseigné et aux séances de répétition.

Il est immédiat de voir que si on a la convergence uniforme vers une fonction, on a la convergence simple vers la même fonction et que dans le cas de convergence, on a unicité de la limite. Il est tout aussi immédiat de voir que la convergence uniforme implique la convergence simple et pas le contraire (cf exemples).

Proposition 2.1.2 (Critère de Cauchy). *La suite* f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ *de fonctions définies sur* $A \subset \mathbb{R}^n$ *converge uniformément sur* A *si et seulement si elle y est uniformément de Cauchy c'est-à-dire*

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists M \in \mathbb{N}_0 \;\; \textit{tel que} \;\; \sup_{x\in A} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall p, q \geq M.$$

Preuve. Il est vraiment immédiat de voir que si la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge uniformément sur A, alors elle y est uniformément de Cauchy.

La réciproque est directe également car on se base sur le fait que toute suite numérique de Cauchy converge. De fait, puisque la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est uniformément de Cauchy sur A, quel que soit $x \in A$, la suite $f_m(x)$ ($m \in \mathbb{N}_0$) est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ comme on le voit immédiatement à partir de la définition d'être uniformément de Cauchy. Pour tout x, on pose alors

$$f(x) \;=\; \lim_{m \to +\infty} f_m(x)$$

et on définit donc ainsi une fonction f sur A. Il reste à montrer que la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers f uniformément sur A. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est uniformément de Cauchy sur A, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\sup_{x \in A} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall p, q \geq M$$

ce qui est équivalent à

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall p, q \geq M, \quad \forall x \in A.$$

Pour $x \in A$ et $p \geq M$, un passage à la limite sur q et la convergence simple donnent alors

$$|f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall p \geq M, \quad \forall x \in A$$

ce qui est équivalent à

$$\sup_{x \in A} |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall p \geq M.$$

Et on peut conclure.□

2.2 Convergence uniforme et régularité

2.2.1 Continuité

Théorème 2.2.1. *(1) Si la suite f_m ($m \in N_0$) de fonctions continues sur $A \subset \mathbb{R}^n$ converge uniformément sur A vers f, alors f est continu sur A.*

(2) On en déduit que si la suite f_m ($m \in N_0$) de fonctions continues sur $A \subset \mathbb{R}^n$ converge uniformément sur tout compact de A vers f, alors f est continu sur A.

Preuve. (1) Soit $a \in A$ et soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in A$ et tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(a) + f_m(a) - f(a)| \\ &\leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(a)| + |f_m(a) - f(a)| \\ &\leq 2 \sup_{t \in A} |f(t) - f_m(t)| \; + \; |f_m(x) - f_m(a)|\,. \end{aligned}$$

Cela étant, la convergence uniforme donne l'existence de $M \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\sup_{t \in A} |f_m(t) - f(t)| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall m \in \mathbb{N}_0,\; m \geq M$$

et la continuité de f_M donne l'existence de $\eta > 0$ (qui dépend de M) tel que

$$x \in A,\; |x - a| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad |f_M(x) - f_M(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On obtient donc

$$x \in A,\ |x-a| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(a)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + |f_M(x)-f_M(a)| \leq \varepsilon.$$

(2) Supposons avoir la convergence uniforme sur tout compact de A. Si x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est une suite de A qui converge vers $a \in A$, on a immédiatement

$$\lim_{m \to +\infty} f(x_m) \ = \ f(a)$$

puisque l'ensemble $\{x_m \ : \ m \in \mathbb{N}_0\} \cup \{a\}$ est un compact de A, donc f y est continu. On peut donc conclure. □

2.2.2 Dérivabilité

Proposition 2.2.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et une suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) de fonctions définies sur Ω telles que*
(1) $f_m \in C_1(\Omega)$ pour tout m
(2) la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge ponctuellement sur Ω (notons f la limite)
(3) pour tout $j = 1, \ldots, n$, la suite $D_j f_m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers une fonction $f^{(j)}$ uniformément sur tout compact de Ω.

Alors
(a) $f \in C_1(\Omega)$,
(b) pour tout $j = 1, \ldots, n$ on a

$$D_j f \ = \ f^{(j)} \quad \textit{sur } \Omega$$

(c) et la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers f uniformément sur tout compact de Ω.

Preuve. (c) Démontrons que l'hypothèse de convergence ponctuelle de la suite et la convergence uniforme des dérivées entraînent la convergence uniforme de la suite elle-même sur tout compact. Pour cela, il suffit de prouver que la suite est uniformément de Cauchy sur tout compact. On peut aussi se contenter de montrer cette convergence sur toute boule fermée $b(y,r)$ incluse dans Ω puisque tout compact est inclus dans une union finie de telles boules. En fait, on va montrer que *la convergence en y entraîne la convergence uniforme dans $b(y,r)$*. Cela sera utilisé dans la suite de ce chapitre.

Quel que soit $r > 0$ tel que $b(y,r) \subset \Omega$, quel que soit $x \in b(y,r)$ et quels que soient $p, q \in \mathbb{N}_0$, on a successivement

$$\begin{aligned}
f_p(x) - f_q(x) \ &= \ (f_p - f_q)(x) \ - \ (f_p - f_q)(y) \ + \ (f_p - f_q)(y) \\
&= \ (f_p - f_q)(y) \ + \ \int_0^1 D\Big((f_p - f_q)(y + t(x-y)\Big) \ dt \\
&= \ (f_p - f_q)(y) \ + \ \int_0^1 \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) \times (D_j(f_p - f_q))\,(y + t(x-y)) \ dt
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\sup_{x \in b(y,r)} |f_p(x) - f_q(x)| \\
&\leq \ |f_p(y) - f_q(y)| \ + \ \sup_{x \in b(y,r)} \int_0^1 \sum_{j=1}^n |x_j - y_j| \times |(D_j(f_p - f_q))\,(y + t(x-y))| \ dt \\
&\leq \ |f_p(y) - f_q(y)| \ + \ r \sum_{j=1}^n \left| \sup_{u \in b(y,r)} (D_j(f_p - f_q))\,(u) \right|
\end{aligned}$$

et on conclut puisque vu l'hypothèse, on a

$$\lim_{p,q\to+\infty}\left(|f_p(y)-f_q(y)| \;+\; r\sum_{j=1}^n\left|\sup_{u\in b(y,r)}\left(D_j(f_p-f_q)\right)(u)\right|\right) \;=\; 0.$$

(a) et (b). Montrons que [1]

$$\lim_{h\in\mathbb{R}_0,\ h\to 0}\frac{f(x+he^{(j)})-f(x)}{h} \;=\; f^{(j)}(x)$$

quels que soient $x\in\Omega$ et $j\in\{1,\dots,n\}$; on obtiendra donc (b) ; (a) est alors immédiat car les $f^{(j)}$ sont des fonctions continues sur Ω, comme limites uniformes sur tout compact de fonctions continues.

Quels que soient $m\in\mathbb{N}_0$ et $h\in\mathbb{R}_0$ tel que $b(x,|h|)\subset\Omega$, on a successivement

$$\begin{aligned}
&\frac{f_m(x+he^{(j)})-f_m(x)}{h} \;-\; f^{(j)}(x)\\
&= \frac{1}{h}\int_0^1 D\left(f_m(x+the^{(j)}\right)\,dt \;-\; f^{(j)}(x)\\
&= \int_0^1 (D_jf_m)(x+the^{(j)})\,dt \;-\; f^{(j)}(x)\\
&= \int_0^1 \left[(D_jf_m)(x+the^{(j)})-f^{(j)}(x)\right]\,dt\\
&= \int_0^1 \left[\left((D_jf_m)(x+the^{(j)})-f^{(j)}(x+the^{(j)})\right)+\left(f^{(j)}(x+the^{(j)})-f^{(j)}(x)\right)\right]\,dt.
\end{aligned}$$

Soit alors $\varepsilon>0$. Utilisons d'une part l'hypothèse de convergence uniforme de la suite D_jf_m $(m\in\mathbb{N}_0)$ vers $f^{(j)}$: si $r>0$ est tel que $b(x,r)\subset\Omega$, il existe $M\in\mathbb{N}_0$ tel que

$$\sup_{y\in b(x,r)}\left|(D_jf_m)(y)-f^{(j)}(y)\right| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2},\quad \forall m\geq M$$

donc aussi

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1\left((D_jf_m)(x+the^{(j)})-f^{(j)}(x+the^{(j)})\right)\,dt\right|\\
&\quad\leq\; \int_0^1\sup_{y\in b(x,r)}\left|(D_jf_m)(y)-f^{(j)}(y)\right|\,dt \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2},\quad \forall m\geq M,\quad \forall |h|\leq r.
\end{aligned}$$

D'autre part, utilisons la continuité de $f^{(j)}$: il existe $\eta>0$ et $r>\eta$ et

$$\left|f^{(j)}(x+y)-f^{(j)}(x)\right|\leq\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall y:\ |y|\leq\eta$$

donc aussi

$$\left|\int_0^1\left(f^{(j)}(x+the^{(j)})-f^{(j)}(x)\right)\,dt\right| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2},\quad \forall h:\ |h|\leq\eta.$$

1. $e^{(j)}$ est l'élément de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la numéro j, qui vaut 1

Ainsi, pour tout $m \geq M$ et tout h tel que $|h| \leq \eta$, on a

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f_m(x+he^{(j)}) - f_m(x)}{h} \; - \; f^{(j)}(x) \right| \\
&= \; \left| \int_0^1 \left[\left((D_j f_m)(x+the^{(j)}) - f^{(j)}(x+the^{(j)}) \right) + \left(f^{(j)}(x+the^{(j)}) - f^{(j)}(x) \right) \right] \; dt \right| \\
&\leq \; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \; = \; \varepsilon.
\end{aligned}$$

La convergence ponctuelle de la suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ vers f donne alors

$$\left| \frac{f(x+he^{(j)}) - f(x)}{h} \; - \; f^{(j)}(x) \right| \; \leq \; \varepsilon, \quad \forall h : \; |h| \leq \eta$$

et on peut conclure. $\square$

Théorème 2.2.3. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et une suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ de fonctions définies sur Ω telles que*
(1) $f_m \in C_L(\Omega)$ pour tout m
(2) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq L-1$ la suite $D^\alpha f_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge ponctuellement sur Ω (notons $f^{(\alpha)}$ la limite)
(3) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| = L$, la suite $D^\alpha f_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers une fonction $f^{(\alpha)}$ uniformément sur tout compact de Ω.
Alors
(a) $f^{(0)} \in C_L(\Omega)$
(b) pour tout α tel que $|\alpha| \leq L$ on a

$$D^\alpha f^{(0)} \; = \; f^{(\alpha)} \quad \textit{sur } \Omega$$

(c) et la suite $D^\alpha f_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers $f^{(\alpha)}$ uniformément sur tout compact de Ω.

Preuve. La preuve de ce résultat s'obtient en appliquant plusieurs fois le résultat précédent (Proposition 2.2.2).

Pour α tel que $|\alpha| = L-1$, on applique ce résultat (Proposition 2.2.2) à la suite $D^\alpha f_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$. Ces fonctions sont bien telles que
(1) $D^\alpha f_m \in C_1(\Omega)$ pour tout m
(2) on a la convergence ponctuelle sur Ω vers une fonction, notée $f^{(\alpha)}$
(3) pour tout $j = 1, \ldots, n$, la suite $D_j D^\alpha f_m = D^{\alpha+e^{(j)}} f_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers une fonction $f^{\alpha+e^{(j)}}$ uniformément sur tout compact de Ω, vu l'hypothèse et le fait que $|\alpha + e^{(j)}| = L$.
On obtient ainsi $f^{(\alpha)} \in C_1(\Omega)$, $D_j f^{(\alpha)} = f^{(\alpha+e^{(j)})}$ et la convergence uniforme de la suite $D^\alpha f_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ sur tout compact de Ω.

On continue de la même manière : pour α tel que $|\alpha| = L-2$, on applique ce résultat (Proposition 2.2.2) à la suite $D^\alpha f_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$. Ces fonctions sont bien telles que
1) $D^\alpha f_m \in C_1(\Omega)$ (même C_2) pour tout m
(2) on a la convergence ponctuelle sur Ω vers une fonction, notée $f^{(\alpha)}$
(3) pour tout $j = 1, \ldots, n$, la suite $D_j D^\alpha f_m = D^{\alpha+e^{(j)}} f_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers une fonction $f^{(\alpha+e^{(j)})}$ uniformément sur tout compact de Ω vu ce qui a été obtenu au point précédent et le fait que $|\alpha + e^{(j)}| = L-1$.
On obtient ainsi $f^{(\alpha)} \in C_1(\Omega)$, $D_j f^{(\alpha)} = f^{(\alpha+e^{(j)})}$ et la convergence uniforme de la suite

$D^\alpha f_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ sur tout compact de Ω. En combinant avec ce qui a été obtenu lorsque la longueur du multi-indice est égale à $L-1$, on a aussi

$$D_j f^{(\alpha)} = f^{\alpha+e^{(j)}} \ \in \ C_1(\Omega) \quad \text{donc} \quad f^{(\alpha)} \in C_2(\Omega) \text{ et } D_k D_j f^{(\alpha)} = f^{(\alpha+e^{(j)}+e^{(k)})}.$$

On continue de la même manière jusqu'au cas où la longueur du multi-indice est égale à 1 et on conclut. □

Proposition 2.2.4. *Dans le cas où l'ouvert est connexe, dans l'hypothèse (2) du théorème 2.2.3, on peut se contenter de demander la convergence ponctuelle en un seul point.*

Preuve. Montrons que la connexité implique que la convergence ponctuelle d'une suite g_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ en un seul point implique la convergence ponctuelle en tout point. Pour cela, il suffit de montrer que l'ensemble

$$E \ = \ \{x \in \Omega : \text{la suite } g_m(x) \ (m \in \mathbb{N}_0) \text{ converge}\}$$

est ouvert et fermé (dans Ω). De fait, comme cet ensemble n'est pas vide, il est alors égal à Ω tout entier sinon lui-même et son complémentaire constitueraient une partition du connexe Ω en deux ouverts non vides, ce qui est contradictoire.

Pour obtenir le résultat, on va se servir d'une propriété démontrée dans la proposition 2.2.2, à savoir que *la convergence en un point y entraîne la convergence uniforme dans toute boule $b(y,r)$ incluse dans Ω.*

Cela étant, d'une part cet ensemble est ouvert : si $x \in E$, alors il existe $r > 0$ tel que $b(x,r) \subset \Omega$, donc la convergence a lieu aussi dans cette boule vu le rappel précédent ; cette boule est donc encore dans E, ce qui permet de conclure que E est ouvert.

L'ensemble E est aussi un fermé de Ω. De fait, soit une suite x_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ d'éléments de E qui converge vers $x \in \Omega$. Il existe alors $r > 0$ tel que $b(x,r) \subset \Omega$ puis M tel que $x_k \in b(x, r/2)$ pour tout $k \geq M$. Mais alors on a $b(x_M, r/2) \subset \Omega$ car si $|y - x_M| \leq r/2$ on obtient les inegalités $|y-x| \leq |y-x_M| + |x_M - x| \leq r$ donc $y \in b(x,r) \subset \Omega$. Comme $x_M \in E$, la suite $g_m(x_M)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge, donc aussi la suite $g_m(u)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ quel que soit $u \in b(x_M, r/2)$. Comme $x_M \in b(x, r/2)$, on a bien sûr $x \in b(x_M, r/2)$ donc la suite $g_m(x)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge, c'est-à-dire $x \in E$ et on conclut. □

2.2.3 Le cas des séries

Dans le cas des séries, le théorème 2.2.3 s'énonce comme suit. Il suffit en effet de considérer les suites des sommes partielles.

Théorème 2.2.5. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et une suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ de fonctions définies sur Ω telles que*

(1) $f_m \in C_L(\Omega)$ pour tout m

(2) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq L-1$, la série $\sum_{m=1}^{+\infty} D^\alpha f_m$ converge ponctuellement sur Ω

(3) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| = L$, la série $\sum_{m=1}^{+\infty} D^\alpha f_m$ converge uniformément sur tout compact de Ω.

Alors

(a) $\sum_{m=1}^{+\infty} f_m \in C_L(\Omega)$

(b) pour tout α tel que $|\alpha| \leq L$ on a

$$D^\alpha \sum_{m=1}^{+\infty} f_m \;=\; \sum_{m=1}^{+\infty} D^\alpha f_m \quad \textit{sur } \Omega$$

(c) et la série $\sum_{m=1}^{+\infty} D^\alpha f_m$ converge uniformément sur tout compact de Ω.

2.2.4 Retour aux séries de puissances, cas réel

Théorème 2.2.6. *Soit a_m $(m \in \mathbb{N})$ une suite de complexes et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si la série*

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m\,(x - x_0)^m$$

converge en $x^* \neq x_0$ alors elle converge absolument et uniformément dans tout intervalle fermé borné de

$$\big]x_0 - |x_0 - x^*|, x_0 + |x_0 - x^*|\big[$$

et elle y est de classe C_∞ et dérivable terme à terme.

Preuve. Pour alléger les notations, considérons $x_0 = 0$ et posons $R = |x^*|$; on doit donc travailler dans

$$]-R, R[.$$

Pour $0 < r < R$, on a

$$|a_m|\,r^m \;=\; \left(\frac{r}{R}\right)^m |a_m| R^m \;\leq\; C\,\theta^m \quad \forall m$$

avec $\theta = r/R < 1$ et[2] $C = \sup\{|a_k| R^k \;:\; k \in \mathbb{N}\} \in [0, +\infty[$ donc

$$\sup_{x\in[-r,r]} \sum_{m=p}^{q} |a_m|\,|x|^m \;\leq\; \sum_{m=p}^{q} |a_m|\,r^m \;\leq\; C \sum_{m=p}^{q} \theta^m$$

et on conclut en ce qui concerne la convergence.

Pour la dérivabilité et la dérivation terme à terme, on utilise le théorème 2.2.5 (c'est en fait le théorème 2.2.3 dans le cas des séries) et avec un ordre quelconque de dérivation (puisqu'on veut montrer que la série est indéfiniment continûment dérivable). La dérivabilité de chaque terme de la série ne pose évidemment pas de problème. Pour vérifier que le résultat peut effectivement être appliqué, il suffit donc de montrer que la série

$$\sum_{m=k}^{+\infty} m \ldots (m - k + 1)\, a_m\, x^{m-k}$$

converge uniformément sur tout compact de $]-R, R[$. Cela s'effectue de manière analogue à la première partie de la preuve. De fait, soient $0 < r < s < R$. On a

$$m \ldots (m - k + 1)\,|a_m|\,r^{m-k} \;\leq \frac{1}{r^k}\, m^k \,\left(\frac{r}{s}\right)^m \left(\frac{s}{R}\right)^m |a_m| R^m.$$

Comme $r/s < 1$, la suite $m^k\, \left(\frac{r}{s}\right)^m$ $(m \in \mathbb{R})$ tend vers 0 donc l'ensemble de ses éléments est borné (disons par D). On obtient donc

$$m \ldots (m - k + 1)\,|a_m|\,r^{m-k} \;\leq \frac{CD}{r^k} \left(\frac{s}{R}\right)^m \quad \forall m$$

et on conclut comme dans le cas précédent. □

2. Ne pas oublier que la série converge en x^* donc le terme général $a_m {x^*}^m$ converge vers 0 ;dès lors les éléments $a_m {x^*}^m$ forment un ensemble borné.

2.3 Le théorème de Weierstrass

Citons (sans démonstration) l'important théorème ci-dessous. Il exprime la densité de l'ensemble des polynômes dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur un intervalle compact K de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $f \mapsto \sup_{x \in K} |f(x)|$.

Théorème 2.3.1. *Pour toute fonction continue f sur l'intervalle compact K de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que que*

$$\sup_{x \in K} |f(x) - P(x)| \;\leq\; \varepsilon.$$

Chapitre 3

Espaces L^p

3.1 Espaces vectoriels normés

Rappelons la définition d'un vecteur et d'un espace vectoriel.

Définition 3.1.1. *On appelle vecteur un élément d'un espace vectoriel (ou linéaire). Et un espace vectoriel E est un ensemble dans lequel on a défini une opération interne appelée addition $(+)$ et une multiplication externe $(\times)$, le plus souvent en utilisant le corps*[1] $\mathbb{K}$ *des réels ou des complexes, qui vérifient les propriétés suivantes :*

1)	$e+f=f+e, \quad \forall e,f\in E$	*(commutativité de +)*
2)	$(e+f)+g=e+(f+g), \quad \forall e,f,g\in E$	*(associativité de +)*
3)	$\exists 0\in E: 0+e=e+0=e, \quad \forall e\in E$	*(existence d'un neutre pour +)*
4)	$\forall e\in E,\ \exists e'\in E\ :\ e+e'=0$	*(tout élément possède un symétrique pour +)*
5)	$(rs)\times e=r(s\times e), \quad \forall e\in E, r,s\in K$	*(associativité pour × et la multiplication dans* $\mathbb{K}$ *)*
6)	$1\times e=e, \quad \forall e\in E$	*(1 est neutre pour ×)*
7)	$(r+s)\times e=r\times e+s\times e$ *et* $r\times(e+f)=r\times e+r\times f$ $\forall e,f\in E, r,s\in K$	*(double distributivité)*

Les quatre premières propriétés se résument en disant que l'addition donne à l'ensemble E une structure de groupe[2] *commutatif.*

Rappelons aussi la notion de norme.

Définition 3.1.2. *Une norme sur un espace vectoriel E est une application $\|.\|$ définie sur E à valeurs réelles positives qui vérifie les propriétés suivantes :*

1) si $e\in E$, alors $\|e\|=0 \Leftrightarrow e=0$

2) $\|c\,e\| \ = \ |c|\,\|e\| \quad \forall c\in\mathbb{K},\ e\in E$

3) $\|e+f\| \ \le \ \|e\|+\|f\| \quad \forall e,f\in E$ (inégalité triangulaire)

1. Un corps est un ensemble K muni de deux lois + et × vérifiant : (1) (K,+) est un groupe commutatif dont l'élément neutre est noté 0 ; (2) $(K\setminus\{0\},\times)$ est un groupe ; (3) la multiplication × est distributive par rapport à l'addition + : pour tous (a,b,c) de K^3, on a $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ et $(b+c)\times a=b\times a+c\times a$

2. Un groupe est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative admettant un élément neutre et, pour chaque élément de l'ensemble, un élément symétrique.

Définissons alors les notions de convergence de suite et de suite de Cauchy dans un espace vectoriel E muni d'une norme $\|.\|$

Définition 3.1.3. *Soit e_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ une suite de E.*
1) On dit qu'elle converge dans E pour la norme $\|.\|$ s'il existe $e \in E$ tel que

$$\lim_{m\to+\infty} \|e_m - e\| \ = \ 0;$$

2) on dit qu'elle est de Cauchy dans E pour la norme $\|.\|$ si, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\|e_p - e_q\| \ \leq \ \varepsilon \quad \forall p, q \geq M.$$

Cela étant, il est évident que si une suite converge, alors sa limite est unique vu la première propriété d'une norme. Il est tout aussi évident que si une suite converge dans E pour la norme $\|.\|$, alors elle est de Cauchy dans E pour la norme $\|.\|$. Mais la réciproque est fausse [3]. Un espace vectoriel dans lequel les suites de Cauchy convergent est appelé *espace de Banach*.

La propriété suivante, directe à démontrer, est d'une grande utilité lorsqu'on doit montrer qu'une suite de Cauchy converge.

Propriété(s) 3.1.4. *Soit e_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ une suite de E qui est de Cauchy pour la norme $\|.\|$. Si cette suite admet une sous-suite convergente, alors elle converge vers la même limite que la sous-suite.*

Preuve. Supposons que la sous-suite $e_{k(m)}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers e pour la norme $\|.\|$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $M \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\left\|e_{k(m)} - e\right\| \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \geq M.$$

Comme la suite e_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ est de Cauchy, il existe aussi $M' \geq M \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\|e_p - e_q\| \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall p, q \geq M'.$$

Ainsi, quel que soit $m \geq M'$, on a

$$\|e_m - e\| \ \leq \ \left\|e_m - e_{k(m)}\right\| + \left\|e_{k(m)} - e\right\| \ \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

puisque $k(m) \geq m \geq M'$ et $m \geq M' \geq M$. □

3.2 Espaces pré-hilbertiens, de Hilbert

Rappelons quelques définitions de base ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition 3.2.1. *Soit H un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, que l'on désignera par $\mathbb{K}$. On appelle produit scalaire sur H une application*

$$< .,. > : \ H \times H \to \mathbb{K}$$

qui vérifie les propriétés suivantes. Quels que soient $h, g, e \in H$ et $c \in \mathbb{K}$, on a

$$(1) \ < h, h > \geq 0 \quad et \ < h, h >= 0 \Leftrightarrow h = 0, \quad (2) \ < ch, g >= c < h, g >,$$

$$(3) \ < h + g, e >=< h, e > + < g, e >, \quad (4) \overline{< h, g >} =< g, h > .$$

3. Par exemple l'espace vectoriel des polynômes muni de la norme $P \mapsto \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$ n'est pas complet (cf le théorème de Weierstrass 2.3.1). On peut aussi définir la notion de suite de Cauchy et de convergence pour un espace métrique (c'est-à-dire un ensemble sur lequel on a défini une distance) ; dans ce cas un ensemble non complet est par exemple l'ensemble des rationnels (car tout réel est limite d'une suite de rationnels), l'ensemble $]0, 1[$ (la suite $1/m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ est de Cauchy mais ne converge pas vers un élément de $]0, 1[$).

Propriété(s) 3.2.2. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Quels que soient $g, h \in H$, on a

$$|< g, h >| \;\leq\; \sqrt{< g, g >}\sqrt{< h, h >}$$

et l'égalité a lieu si et seulement si g et h sont linéairement dépendants.

Preuve. Pour tout complexe λ, on a (*)

$$0 \;\leq < h - \lambda g, h - \lambda g > = < h, h > -\lambda < g, h > -\overline{\lambda} < h, g > +|\lambda|^2 < g, g > .$$

Si $< g, g > \neq 0$, en prenant $\lambda =< h, g > / < g, g >$, on obtient (**)

$$0 \;\leq < h, h > -\frac{| < h, g > |^2}{< g, g >} - \frac{| < h, g > |^2}{< g, g >} + \frac{| < h, g > |^2}{< g, g >} \;= < h, h > -\frac{| < h, g > |^2}{< g, g >}$$

donc

$$|< g, h >| \;\leq\; \sqrt{< g, g >}\sqrt{< h, h >}.$$

Lorsque $< g, g >= 0$, on a $g = 0$ donc $< g, h >= 0$ et l'inégalité reste vraie.

Cela étant, si g et h sont linéairement dépendants, il est clair que l'égalité a lieu. Réciproquement, si l'égalité a lieu et si $g \neq 0$, alors, vu l'inégalité (**), on obtient

$$0 \;= < h - \lambda g, h - \lambda g >$$

avec $\lambda \;= < h, g > / < g, g >$ donc $h = \lambda g$. Si g est nul, g, h sont bien sûr linéairement dépendants.

Remarquons qu'en prenant $\lambda = r < h, g >$ avec r réel, l'inégalité (*) devient

$$0 \;\leq < h - \lambda g, h - \lambda g > = < h, h > -r| < g, h > |^2 - r| < h, g > |^2 + r^2| < h, g >< g, g >$$

et on peut aussi conclure en utilisant le fait que si le coefficient de r^2 n'est pas nul, alors le discriminant du trinôme est négatif. □

Grâce à cette inégalité, on va montrer que la loi $\|.\| : H \to [0, +\infty[\quad h \mapsto \sqrt{< h, h >}$ est une norme sur H. Un espace H muni d'un produit scalaire et de la norme associée est appelé *espace pré-hilbertien* et *hilbertien* (ou de Hilbert) si en outre toutes les suites de Cauchy (pour la norme) convergent.

Propriété(s) 3.2.3. *La loi*

$$\|.\| : H \to [0, +\infty[\quad h \mapsto \sqrt{< h, h >}$$

est une norme sur H.

Preuve. Vu la propriété (1) du produit scalaire, il est clair que cette application est bien définie et telle que $\|h\| = 0$ si et seulement si $h = 0$.

Cela étant, pour $h \in H$ et $c \in \mathbb{K}$, on a aussi directement

$$\|ch\| = \sqrt{< ch, ch >} = \sqrt{c\bar{c} < h, h >} = |c|\|h\|$$

en utilisant les propriétés (2) et (4) du produit scalaire.

Il reste donc à montrer l'inégalité triangulaire, à savoir

$$\sqrt{< h + g, h + g >} \;\leq\; \sqrt{< h, h >} + \sqrt{< g, g >} \quad \forall h, g \in H.$$

On a successivement

$$\begin{aligned}
< h+g, h+g > &= < h,h > + < g,g > + < h,g > + < g,h > \\
&= < h,h > + < g,g > + 2\Re(< h,g >) \\
&\leq < h,h > + < g,g > + 2|< h,g >| \\
&\leq < h,h > + < g,g > + 2\sqrt{< h,h >}\sqrt{< g,g >} \quad \text{inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&= \left(\sqrt{< h,h >} + \sqrt{< g,g >}\right)^2
\end{aligned}$$

et on conclut. □

3.3 Ensembles négligeables

Un ensemble négligeable est un ensemble de mesure nulle. Encore faut-il savoir avec quelle mesure on travaille car un « gros » ensemble peut très bien être négligeable (penser au complémentaire d'un point, qui est négligeable vis-à-vis de la mesure de Dirac). Dans le présent cours, nous ne considérons que la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$.

Rappelons la définition de la mesure d'un pavé [4] : si

$$P = \prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$$

avec $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ et $a_k < b_k$ pour tout $k = 1, \ldots, n$ alors

$$mes(P) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

On a la même mesure pour tous les autres cas de pavés bornés (c'est-à-dire que l'on considère les extrémités a_k, b_k faisant partie des intervalles ou pas).

Définition 3.3.1. *Un ensemble $N \subset \mathbb{R}^n$ est négligeable lorsque, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini ou une infinité dénombrables de pavés $P^{(m)}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que*

$$N \subset \bigcup_{m=1}^{+\infty} P^{(m)} \quad et \quad \sum_{m=1}^{+\infty} mes\left(P^{(m)}\right) \leq \varepsilon$$

Donnons tout de suite les exemples suivants.

Exemple(s) 3.3.2. *(1) Tout ensemble fini, de même que tout ensemble dénombrable est négligeable.*
(2) Dans $\mathbb{R}^2$, toute droite est négligeable ; dans $\mathbb{R}^3$, tout plan est négligeable [5].
(3) Tout ensemble d'intérieur non vide n'est pas négligeable.

Preuve. (1) Si $N = \{x^{(1)}, \ldots, x^{(J)}\}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ les pavés

$$P^{(j)} = \prod_{k=1}^{n} \left[x_k^{(j)} - \frac{\sqrt[n]{\varepsilon/J}}{2}, x_k^{(j)} + \frac{\sqrt[n]{\varepsilon/J}}{2} \right], \ j = 1, \ldots, J$$

4. Pour rappel, un pavé est un produit cartésien d'intervalles bornés non réduits à un point de $\mathbb{R}^n$
5. En toute généralité, dans $\mathbb{R}^n$, tout hyperplan est négligeable.

sont tels que

$$N \subset \bigcup_{j=1}^{J} P^{(j)} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{J} mes\left(P^{(j)}\right) \;\leq\; \sum_{j=1}^{J} \prod_{k=1}^{n} \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{J}} \;=\; \varepsilon.$$

Le cas dénombrable est analogue. Si $N = \{x^{(j)} \;:\; j \in \mathbb{N}_0\}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ les pavés

$$P^{(j)} = \prod_{k=1}^{n} \left[x_k^{(j)} - \frac{\sqrt[n]{\varepsilon 2^{-j}}}{2}, x_k^{(j)} + \frac{\sqrt[n]{\varepsilon 2^{-j}}}{2} \right], \; j \in \mathbb{N}_0$$

sont tels que

$$N \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} P^{(j)} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{+\infty} mes\left(P^{(j)}\right) \;\leq\; \sum_{j=1}^{+\infty} \prod_{k=1}^{n} \sqrt[n]{\varepsilon 2^{-j}} \;=\; \varepsilon.$$

(2) Prouvons le cas de $\mathbb{R}^2$; l'autre utilise la même technique (notations un peu plus lourdes en plus). Un changement de variable linéaire ramenant toute droite sur l'axe X, montrons effectivement que X est négligeable dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $\varepsilon > 0$, les pavés

$$P^{(m)} = [m, m+1] \times [-2^{-|m|}\varepsilon/6, 2^{-|m|}\varepsilon/6]$$

sont tels que

$$X \times \{0\} \;\subset\; \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} P^{(m)}$$

et

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} mes\left(P^{(m)}\right) \;\leq\; \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{-|m|}\,\frac{\varepsilon}{3} \;=\; \frac{\varepsilon}{3}\left(1 + 2\sum_{m=1}^{+\infty} 2^{-m}\right) \;=\; \varepsilon.$$

(3) Admis. □

Terminons en donnant la propriété suivante, fort utile.

Propriété(s) 3.3.3. *Toute union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.*

Preuve. Soient N_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ des ensembles négligeables. On doit montrer que

$$N \;=\; \bigcup_{k=1}^{+\infty} N_k$$

est encore négligeable. Soit donc $\varepsilon > 0$. Comme chaque N_k est négligeable, quel que soit k, il existe donc une suite $P_k^{(m)}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ de pavés tels que

$$N_k \subset \bigcup_{m=1}^{+\infty} P_k^{(m)} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} mes\left(P_k^{(m)}\right) \;\leq\; \varepsilon\, 2^{-k}.$$

Les ensembles $P_k^{(m)}$ $(m, k \in \mathbb{N}_0)$ forment donc une famille dénombrable de pavés tels que

$$N \;=\; \bigcup_{k=1}^{+\infty} N_k \;\subset\; \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{m=1}^{+\infty} P_k^{(m)}$$

et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} mes\left(P_k^{(m)}\right) \;\leq\; \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon\, 2^{-k} \;=\; \varepsilon$$

et on conclut. □

Définition 3.3.4. *(1) Une fonction est définie presque partout (on écrit souvent simplement pp) sur A s'il existe un ensemble négligeable $N \subset A$ tel que $f(x) \in \mathbb{C}$ pour tout $x \in A \setminus N$.*

(2) Une propriété a lieu presque partout (on écrit souvent simplement pp) si elle a lieu en dehors d'un ensemble négligeable.

Enfin, rappelons le résultat suivant, relatif à la continuité.

Propriété(s) 3.3.5. *Si une fonction continue f sur l'ouvert Ω est nulle presque partout sur Ω alors elle y est nulle partout.*

Preuve. Supposons que la fonction f ne soit pas nulle en $x \in \Omega$. Vu la continuité, il existe alors $r > 0$ tel que

$$b(x,r) = \{y \in \Omega : |y - x| \leq r\} \subset \Omega \quad \text{et} \quad |f(y)| > 0 \ \forall y \in b(x,r).$$

Comme la boule $b(x,r)$ est d'intérieur non vide, elle n'est pas négligeable. Comme f est non nul en tout point de celle-ci, on a une contradiction puisque f est nul presque partout. □

3.4 Les espaces $L^1(A)$, $L^2(A)$, $L^\infty(A)$

3.4.1 Rappels

La notion d'intégrabilité de fonctions est celle vue dans le cours d'analyse de Monsieur Nicolay de première année. Il s'agit de la notion qui conduit à la théorie de l'intégration de Lebesgue. Les théorèmes énoncés (et démontrés pour certains) dans le cours de première sont d'une importance primordiale pour le présent cours. Il faut seulement ajouter que, pour cette théorie de l'intégration, les fonctions n'ont pas besoin d'être définies partout : c'est la notion de ≪ presque partout ≫ qui prévaut.

Cela étant, on dit qu'une fonction définie presque partout est *mesurable* si elle est limite presque partout d'une suite de fonctions étagées. Toutes les fonctions continues sont mesurables, mais il y en a bien d'autres ! Pour alléger ce cours tout en ne diminuant pas son champ d'application, nous ferons ici l'hypothèse de travail que toutes les fonctions sont mesurables.

Cela étant, rappelons les résultats fondamentaux suivants.

Théorème 3.4.1. *(1) Soit f une fonction intégrable sur A. Alors*

$$\int_A |f(x)| \, dx \ = \ 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \ pp \ sur \ A$$

(2) (Lévi-convergence monotone) Soit f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ une suite de fonctions intégrables et à valeurs réelles pp sur A. Si
(a) on a $f_m \leq f_{m+1}$ (resp. $f_m \geq f_{m+1}$) pp sur A pour tout m
(b) si la suite

$$\int_A f_m(x) \, dx, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

est majorée (resp. minorée), alors il existe une fonction intégrable f sur A limite pp de la suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ et qui est telle que

$$\lim_{m \to +\infty} \int_A |f_m(x) - f(x)| \ dx \ = \ 0$$

(3) (Lebesgue-convergence majorée) Soit f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) une suite de fonctions intégrables sur A. Si cette suite converge ponctuellement presque partout (on dit tout simplement converge presque partout) sur A vers une fonction f, s'il existe une fonction intégrable F telle que

$$|f_m| \ \leq \ F \quad pp \ \forall m$$

alors f est intégrable sur A et on a

$$\lim_{m\to+\infty} \int_A |f_m(x) - f(x)| \ dx \ = \ 0$$

(4) (Tonelli, cas $\mathbb{R}^n$) Soient $n', n" \in \mathbb{N}_0$ tels que $n = n' + n"$ et soit une fonction f mesurable sur $\mathbb{R}^n$. Si la fonction

$$x" \mapsto \left|f(x', x")\right|$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^{n"}$ pour presque tout x' et si la fonction

$$x' \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n"}} \left|f(x', x")\right| \ dx"$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^{n'}$ alors la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^n$.

(5) (Fubini, cas $\mathbb{R}^n$) Soient $n', n" \in \mathbb{N}_0$ tels que $n = n' + n"$. Si une fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ alors pour presque tout x', la fonction

$$x" \mapsto f(x', x")$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^{n"}$, la fonction

$$x' \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n"}} f(x', x") \ dx"$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^{n'}$ et on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \ dx \ = \ \int_{\mathbb{R}^{n'}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n"}} f(x', x") \ dx" \right) \ dx'.$$

De même (permutation de l'ordre d'intégration sans changer la valeur de l'intégrale) pour presque tout $x"$, la fonction

$$x' \mapsto f(x', x")$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^{n'}$, la fonction

$$x" \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n'}} f(x', x") \ dx'$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^{n"}$ et on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \ dx \ = \ \int_{\mathbb{R}^{n"}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n'}} f(x', x") \ dx' \right) \ dx".$$

3.4.2 L'espace de Banach $L^\infty(A)$

Désignons par $\mathcal{L}^\infty(A)$ l'ensemble des fonctions bornées presque partout sur A c'est-à-dire l'ensemble des fonctions f définies presque partout sur A pour lesquelles il existe $C > 0$ et un ensemble négligeable N tels que

$$|f(x)| \ \leq \ C, \ \forall x \in A \setminus N;$$

C est naturellement appelé « majorant presque partout ».

On définit aussi la relation $\simeq$ suivante : $f \simeq g$ si f et g sont des fonctions égales presque partout sur A. Cette relation est une relation d'équivalence et l'espace quotient associé (c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence) est noté $L^\infty(A)$. Dans cet ensemble, deux fonctions sont donc égales si elles sont égales presque partout (vu la définition de la relation d'équivalence).

Il est aussi immédiat de voir que $L^\infty(A)$ est un espace vectoriel (addition et produit par un complexe habituels).

On va aussi y définir une norme pour laquelle toute suite de Cauchy converge ; l'espace sera donc alors un espace de Banach.

Propriété(s) 3.4.2. *Si f est borné presque partout sur A alors la loi*

$$f \mapsto \inf\{r > 0 \ : \ |f(x)| \leq r \ pp \ sur \ A\}$$

est une norme sur $L^\infty(A)$. On utilise les notations

$$\|f\|_{L^\infty(A)} \ = \ \sup_{pp \ sur \ A} |f| \ = \ \inf\{r > 0 \ : \ |f(x)| \leq r \ pp \ sur \ A\}.$$

On a

$$|f| \ \leq \ \sup_{pp \ sur \ A} |f| = \|f\|_{L^\infty(A)} \quad pp \ surA.$$

Preuve. Comme f est borné presque partout sur A, l'ensemble $\{r > 0 \ : \ |f(x)| \leq r \text{ pp sur } A\}$ n'est pas vide et est évidemment minoré par 0. Sa borne inférieure existe donc et est un réel positif. C'est donc « le plus petit des majorants pp » de f sur A, ou encore la borne supérieure presque partout.

Cela étant, vu la définition des bornes inférieures, il existe une suite r_m ($m \in \mathbb{N}_0$) de nombres strictement positifs et une suite N_m ($m \in \mathbb{N}_0$) d'ensembles négligeables tels que

$$\lim_{m \to +\infty} r_m = \|f\|_{L^\infty(A)} \quad \text{et} \quad |f(x)| \leq r_m \ \forall x \in A \setminus N_m, \ \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

L'ensemble $N = \cup_{m=1}^{+\infty} N_m$ est encore négligeable et on a

$$|f(x)| \leq r_m \ \forall x \in A \setminus N, \ \forall m \in \mathbb{N}_0$$

donc, en passant à la limite sur m,

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(A)} \ \forall x \in A \setminus N.$$

Il reste à montrer que $f \mapsto \|f\|_{L^\infty(A)} \in [0, +\infty[$ est une norme sur $L^\infty(A)$. Cela s'effectue comme dans le cas des bornes supérieures classiques, notamment vu l'inégalité que l'on vient d'obtenir.

- Comme $\|f\|_{L^\infty(A)}$ est un majorant pp de f, il est clair que si ce majorant est nul, alors f est nul pp.

- Si f est nul pp, alors tout réel positif est majorant pp donc la borne inférieure de ceux-ci est nulle, c'est-à-dire $\|f\|_{L^\infty(A)} = 0$.
- Si $c \in \mathbb{C}_0$, alors quel que soit f borné pp sur A, on a

$$|cf(x)| \ \leq \ |c| \ \|f\|_{L^\infty(A)} \quad pp \text{ sur } A$$

donc

$$\|cf\|_{L^\infty(A)} \ \leq |c| \ \|f\|_{L^\infty(A)}\,;$$

de même

$$|f(x)| \ = \ \frac{1}{|c|}\,|cf(x)| \ \leq \ \frac{1}{|c|}\ \|cf\|_{L^\infty(A)} \quad pp \text{ sur } A$$

donc

$$\|f\|_{L^\infty(A)} \ \leq \ \frac{1}{|c|}\ \|cf\|_{L^\infty(A)}$$

c'est-à-dire

$$|c| \ \|f\|_{L^\infty(A)} \ \leq \ \|cf\|_{L^\infty(A)}\,.$$

On a donc bien

$$|c| \ \|f\|_{L^\infty(A)} \ = \ \|cf\|_{L^\infty(A)}\,.$$

- Si f, g sont bornés pp sur A, alors $f+g$ l'est aussi vu

$$|f(x)+g(x)| \ \leq \ |f(x)|+|g(x)| \ \leq \ \|f\|_{L^\infty(A)} + \|g\|_{L^\infty(A)} \quad pp \text{ sur } A;$$

on en déduit aussi tout de suite que

$$\|f+g\|_{L^\infty(A)} \ \leq \ \|f\|_{L^\infty(A)} + \|g\|_{L^\infty(A)}\,.$$

□

Remarque 3.4.3. *Si f est défini et borné sur A alors f est borné presque partout sur A et on a*

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| \ \leq \ \sup_A |f|.$$

Preuve. Rappelons que par définition

$$\sup_A |f| \ = \ \inf\{r > 0 \ : \ |f(x)| \leq r \ \forall x \in A\}.$$

Il est clair que si f est borné, alors f est aussi borné pp puisque l'ensemble vide est négligeable. Cela étant, comme on a

$$|f(x)| \ \leq \ \sup_A |f| \quad \forall x \in A$$

on a aussi cette majoration presque partout. Ainsi $\sup_A |f|$ est un majorant pp, donc est supérieur au « plus petit des majorants pp », c'est-à-dire

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| \ \leq \ \sup_A |f|$$

□

Propriété(s) 3.4.4. *Supposons que f soit continu sur A et que A soit tel que*[6] $A \cap b(x,r)$ *ne soit pas négligeable quels que soient $r > 0$ et $x \in A$. Alors*

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| = \sup_A |f|$$

Preuve. Vu la remarque précédente, il suffit de montrer que

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| \geq \sup_A |f|.$$

Si ce n'est pas le cas, alors

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| < \sup_A |f| = \inf\{r > 0 \ : \ |f(x)| \leq r \ \forall x \in A\}$$

ce qui implique que $\sup_{pp\ sur\ A} |f|$ n'est pas un majorant partout de f sur A. Il existe donc $x \in A$ tel que

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| < |f(x)|.$$

La continuité de f sur A donne alors l'existence de $r > 0$ tel que

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| < |f(y)| \quad \forall y \in A \cap b(x,r). \qquad (*)$$

Soit alors un ensemble négligeable N tel que

$$|f(t)| \leq \sup_{pp\ sur\ A} |f| \quad \forall t \in A \setminus N.$$

L'inégalité (*) donne donc

$$A \cap b(x,r) \subset N$$

ce qui est contradictoire puisque, par hypothèse, $A \cap b(x,r)$ n'est pas négligeable.□

Théorème 3.4.5. *L'espace $L^\infty(A)$ est un espace de Banach pour la norme $\|f\|_{L^\infty(A)}$.*

Preuve. Cela se démontre exactement comme pour la convergence uniforme, à la différence près que les bornes supérieures, les inégalités, doivent être prises presque partout chaque fois. Comme on travaille avec des suites et que toute union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable, cela ne pose aucun problème pour que la preuve dans le cas de la convergence uniforme s'étende à ce cas-ci. □

3.4.3 L'espace de Banach $L^1(A)$

Désignons par $\mathcal{L}^1(A)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur A. Comme dans le cas des fonctions bornées presque partout, on reprend la relation $\simeq$ suivante : $f \simeq g$ si f et g sont des fonctions égales presque partout sur A. Cette relation est une relation d'équivalence et l'espace quotient associé (c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence) est noté $L^1(A)$. Dans cet ensemble, deux fonctions sont donc égales si elles sont égales presque partout (vu la définition de la relation d'équivalence).

Il est également immédiat de voir que $L^1(A)$ est un espace vectoriel (addition et produit par un complexe habituels).

On va aussi y définir une norme pour laquelle toute suite de Cauchy converge ; l'espace sera donc alors un espace de Banach.

6. Cela est vérifié lorsque A est ouvert, lorsque A est un pavé, ...

Propriété(s) 3.4.6. *La loi*

$$f \mapsto \int_A |f(x)|\ dx$$

est une norme sur $L^1(A)$. On utilise la notation

$$\|f\|_{L^1(A)} \ = \ \int_A |f(x)|\ dx.$$

Preuve. Vu les propriétés des intégrales, on a immédiatement, pour f, g intégrables et $c \in \mathbb{C}$,

$$\|f+g\|_{L^1(A)} \ \leq \ \|f\|_{L^1(A)} + \|g\|_{L^1(A)} \quad \text{et} \quad \|cf\|_{L^1(A)} \ = \ |c|\ \|f\|_{L^1(A)}\,.$$

De plus on a vu que

$$\int_A |f(x)|\ dx \ = \ 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0\ pp$$

donc on a bien affaire à une norme. □

Théorème 3.4.7. *L'espace $L^1(A)$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_{L^1(A)}$.*

De plus, de toute suite qui converge pour la norme $\|.\|_{L^1(A)}$ vers une fonction f on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout (c'est-à-dire qu'en dehors d'un ensemble négligeable, on a la convergence ponctuelle) vers f.

Preuve. Nous utilisons ici le résultat qui affirme que si une suite de Cauchy admet une sous-suite convergente, alors la suite converge (vers la même limite que la sous-suite).

Pour alléger les notations, la norme $\|.\|_{L^1(A)}$ sera simplement notée $\|.\|$.

Soit donc une suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) de Cauchy pour $\|.\|$.

Tout d'abord, nous allons faire ce que l'on appelle une « extraction à la Cauchy » en exploitant le fait que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N}_0\ :\ \|f_p - f_q\| \ \leq \ \varepsilon\ \forall p, q \geq M.$$

On a $2^{-1} > 0$ donc il existe $M_1 \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\|f_p - f_q\| \ \leq \ 2^{-1}\ \forall p, q \geq M_1.$$

Comme $2^{-2} > 0$, il existe ensuite $M_2 > M_1$ tel que

$$\|f_p - f_q\| \ \leq \ 2^{-2}\ \forall p, q \geq M_2.$$

On a donc obtenu

$$\|f_{M_1} - f_{M_2}\| \ \leq \ 2^{-1}.$$

Continuons : comme $2^{-3} > 0$, il existe $M_3 > M_2$ tel que

$$\|f_p - f_q\| \ \leq \ 2^{-3}\ \forall p, q \geq M_3.$$

On a donc obtenu

$$\|f_{M_2} - f_{M_3}\| \ \leq \ 2^{-2}.$$

Et ainsi de suite. En posant $k(m) = M_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a donc une sous-suite de naturels qui vérifie

$$\|f_{k(m)} - f_{k(m+1)}\| \ \leq \ 2^{-m} \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Montrons alors que la sous-suite $f_{k(m)}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers une fonction intégrable f pour la norme $\|.\|$. La clef est un retour aux séries, une utilisation du théorème de Levi puis du théorème de Lebesgue.

Considérons la suite de sommes partielles F_M $(M \in \mathbb{N}_0)$ définie par

$$F_M(x) \;=\; \sum_{m=1}^{M} \left|f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x)\right|.$$

Il s'agit d'une suite de fonctions intégrables sur A, évidemment croissante vu sa forme et qui est telle que, quel que soit $M \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}
\int_A F_M(x)\,dx &= \sum_{m=1}^{M} \int_A \left|f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x)\right|\,dx \\
&= \sum_{m=1}^{M} \|f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}\| \\
&\leq \sum_{m=1}^{M} 2^{-m} \;\leq 1.
\end{aligned}$$

Le théorème de Levi dit alors notamment que cette suite F_M $(M \in \mathbb{N}_0)$ converge presque partout vers une fonction intégrable, notée F par exemple. Mais on sait que si une série (numérique) est absolument convergente, elle est aussi convergente ; il s'ensuit que la suite

$$\sum_{m=1}^{M} \left(f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x)\right), \quad M \in \mathbb{N}_0$$

est aussi convergente pour presque tout x. Comme on a, pour tout M,

$$\sum_{m=1}^{M} \left(f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x)\right) \;=\; f_{k(M+1)}(x) - f_{k(1)}(x)$$

on a obtenu que la suite $f_{k(m)}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge presque partout. Notons f cette limite. Pour conclure, il reste à montrer que la convergence a lieu pour la norme $\|.\|$.

Ici c'est le théorème de Lebesgue qui va être utilisé, pour la suite $f_{k(m)}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$. On a bien une suite de fonctions intégrables qui converge presque partout (vers f) ; de plus, quel que soit $m \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\begin{aligned}
\left|f_{k(m)}\right| &= \left|f_{k(m)} - f_{k(m-1)} + f_{k(m-1)} - \ldots + f_{k(1)}\right| \\
&\leq \left|f_{k(1)}\right| + \sum_{j=1}^{m-1} \left|f_{k(j+1)} - f_{k(j)}\right| \\
&\leq \left|f_{k(1)}\right| \;+\; F
\end{aligned}$$

On peut donc conclure que toute suite de Cauchy converge.

Dans ce qui précède, on a extrait une sous-suite qui converge presque partout à partir d'une suite de Cauchy (pour la norme). Une suite qui converge pour la norme étant de Cauchy pour la norme, la seconde partie de l'énoncé est donc justifiée également. □

Remarque 3.4.8. *Dans ce précède, on ne peut pas améliorer le résultat concernant la convergence ponctuelle : il s'agit bien de l'existence d'une* sous-souite *qui converge* presque partout.

De fait, par exemple, la suite $f_m = \chi_{I_m}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ avec $I_m =]l2^{-k}, (l+1)2^{-k}]$ où $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$ converge vers 0 dans $L^1(\mathbb{R})$ mais ne converge en aucun point de $]0,1]$; par contre la sous-suite $\chi_{]0,2^{-k}]}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ converge vers 0 ponctuellement sur $\mathbb{R}$.

3.4.4 L'espace de Hilbert $L^2(A)$

Désignons par $\mathcal{L}^2(A)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur A. Comme dans les cas précédents, on reprend la relation $\simeq$ suivante : $f \simeq g$ si f et g sont des fonctions égales presque partout sur A. Cette relation est une relation d'équivalence et l'espace quotient associé (c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence) est noté $L^2(A)$. Dans cet ensemble, deux fonctions sont donc égales si elles sont égales presque partout (vu la définition de la relation d'équivalence).

Il est direct de voir que $L^2(A)$ est un espace vectoriel (addition et produit par un complexe habituels) : pour les multiples complexes, c'est évident et pour l'addition, il suffit de noter que, puisque $0 \leq (|z| - |z'|)^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2|zz'|$ pour tous complexes z, z',

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)|^2 &\leq |f(x)|^2 + 2|f(x)g(x)| + |g(x)|^2 \\ &\leq |f(x)|^2 + |f(x)|^2 + |g(x)|^2 + |g(x)|^2 \\ &= 2|f(x)|^2 + 2|g(x)|^2 \end{aligned}$$

avec $2|f|^2 + 2|g|^2$ intégrable.

On va aussi y définir une norme pour laquelle toute suite de Cauchy converge ; cette norme sera définie à partir d'un produit scalaire donc l'espace sera alors un espace de Hilbert.

Propriété(s) 3.4.9. *La loi*

$$f, g \mapsto < f, g > = \int_A f(x)\, \overline{g(x)}\ dx$$

est un produit scalaire sur $L^2(A)$.

Dès lors la loi

$$f \mapsto \sqrt{< f, f >} = \sqrt{\int_A |f(x)|^2\ dx}$$

est une norme sur $L^2(A)$. On utilise la notation

$$\|f\|_{L^2(A)} = \sqrt{\int_A |f(x)|^2\ dx}.$$

Preuve. Notons tout d'abord une fois de plus que puisqu'on a

$$0 \leq (|z| - |z'|)^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2|zz'|$$

pour tous complexes z, z', on obtient

$$\left| f(x)\overline{g(x)} \right| \leq \frac{1}{2} \left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2 \right) \quad \text{pour presque tout } x,$$

ce qui assure que la fonction que l'on intègre dans la définition du produit scalaire est bien intégrable lorsque f et g sont de carré intégrable.

Les autres propriétés à satisfaire pour être un produit scalaire (cf la section 3.2) sont immédiates à vérifier étant donné les propriétés du calcul intégral. □

Théorème 3.4.10. *L'espace $L^2(A)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|.\|_{L^2(A)}$.*

Preuve. Cette preuve est une adaptation du cas L^1. Pour alléger les notations, la norme $\|.\|_{L^2(A)}$ sera ici aussi simplement notée $\|.\|$.

Soit donc une suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) de Cauchy pour $\|.\|$.

Tout d'abord, une « extraction à la Cauchy » est encore de mise ; c'est la même chose que dans le cas L^1 puisqu'on n'utilise que la notion de norme. On a une sous-suite $k(m)$ ($m \in \mathbb{N}_0$) telle que

$$\|f_{k(m)} - f_{k(m+1)}\| \;\leq\; 2^{-m} \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Montrons alors aussi que la sous-suite $f_{k(m)}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge pour la norme $\|.\|$ vers une fonction de carré intégrable f. Considérons la suite de sommes partielles G_M ($M \in \mathbb{N}_0$) définie par

$$G_M(x) \;=\; \left(\sum_{m=1}^{M} \left|f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x)\right|\right)^2.$$

Il s'agit d'une suite de fonctions intégrables sur A, évidemment croissante vu sa forme et qui est telle que, quel que soit $M \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}
\int_A G_M(x)\, dx \;&=\; \int_A \left(\sum_{m=1}^{M} \left|f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x)\right|\right)^2 dx \\
&=\; \left\|\sum_{m=1}^{M} \left|f_{k(m+1)} - f_{k(m)}\right|\right\|^2 \\
&\leq\; \left(\sum_{m=1}^{M} \left\|f_{k(m+1)} - f_{k(m)}\right\|\right)^2 \\
&\leq\; \left(\sum_{m=1}^{M} 2^{-m}\right)^2 \;\leq 1.
\end{aligned}$$

Le théorème de Levi dit alors notamment que cette suite G_M ($M \in \mathbb{N}_0$) converge presque partout vers une fonction intégrable, que l'on va noter G. Bien sûr la suite des racines carrées des G_M converge aussi presque partout. Et on reprend comme dans le cas L^1 : on sait que si une série (numérique) est absolument convergente, elle est aussi convergente ; il s'ensuit que la suite

$$\sum_{m=1}^{M} \left(f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x)\right), \quad M \in \mathbb{N}_0$$

est aussi convergente pour presque tout x. Comme on a, pour tout M,

$$\sum_{m=1}^{M} \left(f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x)\right) \;=\; f_{k(M+1)}(x) - f_{k(1)}(x)$$

on a obtenu que la suite $f_{k(m)}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge presque partout. Notons f cette limite. Pour conclure, il reste à montrer que la convergence a lieu pour la norme $\|.\|$.

Ici c'est le théorème de Lebesgue qui va être utilisé. Pour tout $p \in \mathbb{N}_0$, considérons la suite $|f_{k(m)} - f_{k(p)}|^2$ ($m \in \mathbb{N}_0$). C'est une suite de fonctions intégrables qui converge presque partout (vers $|f - f_{k(p)}|^2$) ; de plus, quel que soit $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $m > p$, on a

$$\begin{aligned}
\left|f_{k(m)} - f_{k(p)}\right|^2 &= \left|f_{k(m)} - f_{k(m-1)} + f_{k(m-1)} - \ldots + f_{k(p+1)} - f_{k(p)}\right|^2 \\
&\leq \left(\left|\sum_{j=p}^{m-1} \left|f_{k(j+1)} - f_{k(j)}\right|\right|\right)^2 \\
&\leq G_{m-1} \\
&\leq G
\end{aligned}$$

avec G intégrable. Le théorème de Lebesgue donne donc l'intégrabilité de la fonction $|f - f_{k(p)}|^2$ et

$$\lim_{m\to+\infty} \int_A \left|f_{k(m)}(x) - f_{k(p)}(x)\right|^2 \, dx = \int_A \left|f(x) - f_{k(p)}(x)\right|^2 \, dx$$

c'est-à-dire

$$\lim_{m\to+\infty} \left\|f_{k(m)} - f_{k(p)}\right\|^2 = \left\|f - f_{k(p)}\right\|^2.$$

On obtient aussi que f appartient à l'espace $L^2(A)$ car cet espace est un espace vectoriel et que, quel que soit p, on a $f = f - f_{k(p)} + f_{k(p)}$ avec $f - f_{k(p)}$ et $f_{k(p)}$ qui sont des fonctions de celui-ci. On obtient alors aussi facilement la convergence annoncée. De fait, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe M tel que

$$\|f_r - f_s\| \leq \varepsilon \quad \forall r, s \geq M$$

donc aussi

$$\left\|f_{k(m)} - f_{k(p)}\right\| \leq \varepsilon \quad \forall m, p \geq M;$$

un passage à la limite sur m donne alors (vu ce qui précède)

$$\left\|f - f_{k(p)}\right\| \leq \varepsilon \quad \forall p \geq M$$

et on conclut. □

3.4.5 Le théorème d'approximation

Rappelons ici deux résultats qui se démontrent en utilisant des théorèmes relatifs au calcul intégral (notamment le théorème de Fubini). Nous renvoyons au syllabus de J. Schmets pour leur démonstration ainsi qu'une explication montrant qu'on ne peut avoir le même résultat dans $L^\infty(\Omega)$.

Théorème 3.4.11. *(1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout $f \in L^1(\Omega)$ (resp. $f \in L^2(\Omega)$), et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction étagée α* **dans**[7] *Ω telle que*

$$\|f - \alpha\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon \quad \left(\textit{resp.} \quad \|f - \alpha\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon\right).$$

(2) Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (resp. $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$), on a

$$\lim_{h\to 0} \|f(.) - f(. + h)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0 \quad \left(\textit{resp.} \quad \lim_{h\to 0} \|f(.) - f(. + h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0\right).$$

Dans la suite de ce cours, nous établirons une version « régulière » de ce résultat, après avoir défini et étudié la notion de produit de composition de fonctions.

7. Une fonction étagée dans Ω est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de pavés dont l'adhérence est incluse dans l'ouvert Ω.

Chapitre 4

Produit de composition

4.1 Définition et premières propriétés ; interprétation

Nous présentons ici l'essentiel et pour aller droit au but et appréhender cet outil le plus rapidement possible, on se limite aux fonctions d'une variable réelle. Pour davantage de propriétés et des compléments (notamment le cas des fonctions de plusieurs variables), voir le pdf formé d'extraits de syllabus de Jean Schmets, disponible directement via les pages web relatives au cours.

Définition 4.1.1. *Soient f et g deux fonctions définies presque partout sur $\mathbb{R}$; si $y \in \mathbb{R}$ et si la fonction $x \mapsto f(x)\,g(y-x)$ est intégrable, son intégrale est notée*

$$(f * g)(y) \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(x)\,g(y-x)\;dx.$$

Lorsque la fonction $x \mapsto f(x)\,g(y-x)$ est intégrable pour presque tout y, le produit de convolution (ou de composition) de f et g est la fonction

$$y \mapsto (f * g)(y).$$

Propriété(s) 4.1.2. *Le produit de composition est commutatif et linéaire sur chacun des facteurs.*

Preuve. C'est immédiat par changement de variable (linéaire) : on a

$$(f * g)(y) \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(x)\,g(y-x)\;dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(y-t)\,g(t)\;dt \;=\; (g * f)(y).$$

La linéarité est immédiate étant donné la linéarité de l'intégrale. □

Interprétation 4.1.3. Voir cours et aussi le descriptif par exemple à l'adresse

https ://fr.wikipedia.org/wiki/Produit_de_convolution

4.2 Quelques exemples

Voir quelques calculs explicites (cours).

4.3 Conditions suffisantes d'existence et propriétés

Sont présentées ici des conditions sous lesquelles le produit de composition existe et les propriétés générales de cette fonction. Il faut bien noter qu'en aucun cas il ne s'agit de conditions nécessaires !

Les notations p, q, r désignent soit $1, 2$ soit l'infini et on utilise la convention $1/\infty = 0$. La relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \;=\; 1 + \frac{1}{r}$$

n'a lieu que pour (1) $p = q = r = 1$, (2) $p = 1$ et $q = r = 2$, (3) $p = 1$ et $q = r = \infty$, (4) $p = q = 2$ et $r = \infty$ et bien sûr aussi en permutant les rôles de p et q. Cependant, vu la commutativité du produit de composition, il ne sera pas nécessaire de les traiter.

Cela étant, lorsque

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \;=\; 1 + \frac{1}{r}$$

on a le résultat suivant.

Théorème 4.3.1. *Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$. Alors*

1. *$(f * g)(y)$ existe pour presque tout y si $r \neq \infty$ et pour tout y si $r = \infty$*
2. *$f * g \in L^r(\mathbb{R})$*
3. *$\|f * g\|_r \;\leq\; \|f\|_p \,\|g\|_q$.*
   Cette inégalité implique que si f_m $(m \in \mathbb{N})$ est une suite d'éléments de $L^p(\mathbb{R})$ qui converge dans L^p vers f et si g_m $(m \in \mathbb{N})$ est une suite d'éléments de $L^q(\mathbb{R})$ qui converge dans L^q vers g, alors la suite $f_m * g_m$ $(m \in \mathbb{N})$ converge dans L^r vers $f * g$.

Preuve. Etablissons la conséquence de la troisième propriété. On a successivement

$$\begin{aligned}
\|f_m * g_m - f * g\|_r &= \|f_m * g_m - f_m * g + f_m * g - f * g\|_r \\
&= \|f_m * (g_m - g) + (f_m - f) * g\|_r \\
&\leq \|f_m * (g_m - g)\|_r \;+\; \|(f_m - f) * g\|_r \\
&\leq \|f_m\|_p \,\|g_m - g\|_q \;+\; \|f_m - f\|_p \,\|g\|_q \,.
\end{aligned}$$

La convergence dans L^p de la suite f_m $(m \in \mathbb{N})$ et dans L^q de la suite g_m $(m \in \mathbb{N})$ donne tout de suite le résultat annoncé.

Etudions le cas $\boxed{L^1 * L^1}$. On doit d'abord se poser la question de savoir si la fonction

$$x \mapsto f(y - x)\; g(x)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour presque tout y. Clairement, cela ne s'obtient pas directement car si f et g sont bien intégrables, on ne peut rien dire de leur produit ! Mais tout va se démontrer directement par le théorème de Tonelli-Fubini.

De fait, considérons la fonction de deux variables

$$F \;:\; (x, y) \mapsto |f(y - x)\, g(x)|.$$

Pour presque tout x, la fonction $y \mapsto |f(y-x)\, g(x)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque f l'est. Ensuite, la fonction

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(y - x)\, g(x)|\; dy \;=\; |g(x)l \;\int_{\mathbb{R}} |f(y - x)|\; dy \;=\; |g(x)| \;\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\; dt$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque g l'est. Il s'ensuit que la fonction

$$(x,y) \ \mapsto \ f(y-x)\,g(x)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et que l'on peut notamment permuter les intégrales sans changer la valeur de l'intégrale double. On obtient donc que $x \mapsto f(y-x)\ g(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour presque tout y et que $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(y-x)\ g(x)\ dx \ = \ (f*g)(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Enfin, on a successivement

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |(f*g)(y)|\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(y-x)\,g(x)\ dx \right|\ dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y-x)\,g(x)|\ dx \right) dy \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} |f(y-x)\,g(x)|\ dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\ \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y-x)|\ dy \right)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\ \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\ dt \right)\ dx \\
&= \|g\|_1\ \|f\|_1.
\end{aligned}$$

Etudions ensuite le cas $\boxed{L^1 * L^2}$. Ici encore, on doit d'abord se poser la question de savoir si la fonction

$$x \mapsto f(y-x)\ g(x)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour presque tout y. Et encore une fois ce n'est pas immédiat car il s'agit d'une fonction qui est le produit d'une fonction intégrable et d'une fonction de carré intégrable et on ne peut donc rien conclure directement quant à son intégrabilité. Ecrivons alors le module de ce produit d'une autre manière : comme on a

$$|f(y-x)\ g(x)| \ = \ \sqrt{|f(y-x)|}\ \sqrt{|f(y-x)|}\,|g(x)|,$$

on voit que la fonction (de x) dont on veut prouver l'intégrabiité pour presque tout y s'écrit comme le produit des fonctions

$$x \mapsto \sqrt{|f(y-x)|} \quad \text{et} \quad x \mapsto \sqrt{|f(y-x)|}\,|g(x)|.$$

La première fonction est bien sûr de carré intégrable pour tout y puisque f est intégrable ; quant à la seconde, elle est également de carré intégrable pour presque tout y car

$$x \mapsto |f(y-x)|\,|g^2(x)|$$

est intégrable pour presque tout y étant donné le fait que $f, g^2 \in L^1(\mathbb{R})$ et le cas $L^1 * L^1$. Ainsi,

$$x \mapsto |f(y-x)\ g(x)|$$

peut s'écrire comme le produit de deux fonctions de carré intégrable et est donc intégrable.

Il reste alors à montrer que le produit de composition est de carré intégrable et que l'on a la majoration annoncée pour la norme. En écrivant la fonction à intégrer comme précédemment et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a successivement

$$\begin{aligned}
|(f*g)(y)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} f(y-x)\,g(x)\ dx\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \sqrt{|f(y-x)|}\ \sqrt{|f(y-x)|}\,|g(x)|\ dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{|f(y-x)|}\right)^2\ dx\right)^{1/2}\ \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{|f(y-x)|}\right)^2\ |g(x)|^2\ dx\right)^{1/2} \\
&= \|f\|_1^{1/2}\ \left((|f|*|g^2|)(y)\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

donc

$$|(f*g)(y)|^2 \ \leq\ \|f\|_1\ (|f|*|g^2|)(y)$$

avec $y \mapsto (|f|*|g^2|)(y)$ intégrable ; dès lors on a bien obtenu $f*g \in L^2(\mathbb{R})$. La majoration des normes est alors immédiate

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |(f*g)(y)|^2\ dy \\
&\leq \|f\|_1\ \int_{\mathbb{R}} (|f|*|g^2|)(y)\ dy \\
&= \|f\|_1\ \big\||f|*|g^2|\big\|_1 \\
&\leq \|f\|_1\ \|f\|_1\ \|g^2\|_1 \\
&= \|f\|_1^2\ \|g\|_2^2
\end{aligned}$$

et on termine donc le cas $L^1 * L^2$.

Passons au cas $\boxed{L^1 * L^\infty}$. Ici, lorsque f est intégrable et g borné (pp), il est clair que pour tout y, la fonction

$$x \mapsto f(y-x)\,g(x)$$

est intégrable puisque de module majoré par $\|g\|_\infty\,|f(y-x)|$.

Cela étant, l'appartenance du produit de composition à $L^\infty(\mathbb{R})$ et la majoration de la norme sont immédiates. De fait pour tout y, on a

$$|(f*g)(y)| \ =\ \left|\int_{\mathbb{R}} f(y-x)\,g(x)\ dx\right| \ \leq\ \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(y-x)|\,dx \ =\ \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt \ =\ \|g\|_\infty\,\|f\|_1.$$

Pour terminer considérons le cas $\boxed{L^2 * L^2}$. Ici, l'existence du produit de composition pour tout y est claire aussi car la fonction

$$x \mapsto f(y-x)\,g(x)$$

est le produit de deux fonctions de carré intégrable, donc est intégrable.

L'appartenance du produit de composition à $L^\infty(\mathbb{R})$ et la majoration de la norme sont immédiates également par utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout y, on a

$$|(f*g)(y)| \ \leq\ \int_{\mathbb{R}} |f(y-x)|\,|g(x)|\ dx \ \leq\ \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y-x)|^2\ dx\right)^{1/2}\ \|g\|_2 \ =\ \|f\|_2\,\|g\|_2$$

donc $f * g$ est borné partout et

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |(f*g)(y)| \ \leq\ \|f\|_2\,\|g\|_2.$$

□

Lorsque $r = \infty$, on a davantage de résultats.

Théorème 4.3.2. *1. Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ alors la fonction $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 à l'infini.*

2. $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ alors la fonction $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 à l'infini pour autant qu'il en soit de même pour g.

Preuve. (1) Considérons tout d'abord le cas $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

D'une part la continuité uniforme résulte d'une simple utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du théorème d'approximation. De fait, on a successivement

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} |(f*g)(x+h) - (f*g)(x)| \ &=\ \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x+h-y)\,g(y)\ dy\ -\ \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,g(y)\ dy \right| \\
&=\ \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x+h-y) - f(x-y))\ g(y)\ dy \right| \\
&\leq\ \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x+h-.) - f(x-.)\|_2\ \ \|g\|_2 \\
&=\ \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(.+h) - f(.)\|_2\ \ \|g\|_2 \\
&=\ \|f(.+h) - f(.)\|_2\ \ \|g\|_2
\end{aligned}$$

et on conclut par le théorème d'approximation dans $L^2(\mathbb{R})$.

Montrons à présent que

$$\lim_{x\to\infty} (f*g)(x) \ =\ 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $R > 0$, on a

$$(f*g)(x) \ =\ \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,g(y)\ dy \ =\ \int_{|y|\leq R} f(x-y)\,g(y)\ dy\ +\ \int_{|y|>R} f(x-y)\,g(y)\ dy.$$

Examinons le second terme du membre de gauche. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned}
\left| \int_{|y|>R} f(x-y)\,g(y)\ dy \right| \ &\leq\ \left(\int_{|y|>R} |f(x-y)|^2\ dy \right)^{1/2} \left(\int_{|y|>R} |g(y)|^2\ dy \right)^{1/2} \\
&\leq\ \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^2\ dy \right)^{1/2} \left(\int_{|y|>R} |g(y)|^2\ dy \right)^{1/2} \\
&=\ \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\ dt \right)^{1/2} \left(\int_{|y|>R} |g(y)|^2\ dy \right)^{1/2} \\
&=\ \|f\|_2 \left(\int_{|y|>R} |g(y)|^2\ dy \right)^{1/2};
\end{aligned}$$

comme g^2 est intégrable, on a

$$\lim_{R \to +\infty} \left(\int_{|y|>R} |g(y)|^2 \, dy \right)^{1/2} = 0$$

donc il existe $R_0 > 0$ tel que

$$\|f\|_2 \left(\int_{|y|>R_0} |g(y)|^2 \, dy \right)^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Examinons alors

$$\int_{|y|\leq R_0} f(x-y)\, g(y) \, dy.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz encore, on a

$$\begin{aligned}
\left| \int_{|y|\leq R_0} f(x-y)\, g(y) \, dy \right| &\leq \left(\int_{|y|\leq R_0} |f(x-y)|^2 \, dy \right)^{1/2} \left(\int_{|y|\leq R_0} |g(y)|^2 \, dy \right)^{1/2} \\
&\leq \|g\|_2 \left(\int_{|y|\leq R_0} |f(x-y)|^2 \, dy \right)^{1/2} \\
&= \|g\|_2 \left(\int_{|x-t|\leq R_0} |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \\
&= \|g\|_2 \left(\int_{x-R_0}^{x+R_0} |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} ;
\end{aligned}$$

comme f^2 est intégrable, on a

$$\lim_{x \to \infty} \left(\int_{x-R_0}^{x+R_0} |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} = 0$$

donc il existe $N > 0$ tel que

$$\|g\|_2 \left(\int_{x-R_0}^{x+R_0} |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout x tel que $|x| \geq N$.

Dès lors, on a

$$|(f * g)(x)| \leq \left| \int_{|y|\leq R_0} f(x-y) |\, g(y) \, dy \right| + \left| \int_{|y|>R_0} f(x-y)\, g(y) \, dy \right| \leq \varepsilon$$

pur tout x tel que $|x| \geq N$ et on conclut.

(2) Examinons alors le cas $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

La continuité uniforme s'obtient de manière tout à fait analogue au cas précédent, en adaptant bien sûr les estimations utilisant les propriétés de f et g. On a successivement

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} |(f*g)(x+h)-(f*g)(x)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x+h-y)\,g(y)\;dy \;-\; \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,g(y)\;dy \right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \big(f(x+h-y)-f(x-y)\big)\;g(y)\;dy \right| \\
&\le \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x+h-.)-f(x-.)\|_1\;\;\|g\|_\infty \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(.+h)-f(.)\|_1\;\;\|g\|_\infty \\
&= \|f(.+h)-f(.)\|_1\;\;\|g\|_\infty
\end{aligned}$$

et on conclut par le théorème d'approximation dans $L^1(\mathbb{R})$.

Montrons à présent que

$$\lim_{x\to\infty} (f*g)(x) \;=\; 0$$

lorsqu'en outre $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$. La preuve est une adaptation de celle du cas $L^2 * L^2$.

Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $R>0$, on a

$$(f*g)(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,g(y)\;dy \;=\; \int_{|y|\le R} f(x-y)\,g(y)\;dy \;+\; \int_{|y|>R} f(x-y)\,g(y)\;dy.$$

Examinons le second terme du membre de gauche. On a

$$\left| \int_{|y|>R} f(x-y)\,g(y)\;dy \right| \;\le\; \sup_{|y|>R} |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\;dy \;=\; \|f\|_1 \sup_{|y|>R} |g(y)|.$$

Dès lors, comme g tend vers 0 à l'infini, il existe $R_0>0$ tel que

$$\|f\|_1 \sup_{|y|>R_0} |g(y)| \;\le\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

Examinons alors

$$\int_{|y|\le R_0} f(x-y)\,g(y)\;dy.$$

On a

$$\begin{aligned}
\left| \int_{|y|\le R} f(x-y)\,g(y)\;dy \right| &\le \|g\|_\infty \int_{|y|\le R} |f(x-y)|\;dy \\
&= \|g\|_\infty \int_{|x-t|\le R} |f(t)|\;dt \\
&= \|g\|_\infty \int_{x-R_0}^{x+R_0} |f(t)|\;dt.
\end{aligned}$$

Puisque la fonction f est intégrable, le membre de droite tend vers 0 si x tend vers l'infini.

Finalement, comme dans le cas précédent, il existe $N>0$ tel que

$$|(f*g)(x)| \;\le\; \left| \int_{|y|\le R_0} f(x-y)\,g(y)\;dy \right| \;+\; \left| \int_{|y|>R_0} f(x-y)\,g(y)\;dy \right| \;\le\; \varepsilon$$

pour tout x tel que $|x|\ge N$ et on conclut. □

4.4 Unités approchées de composition

Considérons tout d'abord le cas des fonctions intégrables ou de carré intégrable.

Définition 4.4.1. *Une suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ de fonction de $L^1(\mathbb{R})$ est appelée unité approchée de composition dans $L^1(\mathbb{R})$ (resp. dans $L^2(\mathbb{R})$) lorsque l'on a*

$$\lim_{m\to+\infty} f_m * f \;=\; f \quad \textit{dans} \quad L^1(\mathbb{R}) \quad (\textit{resp. dans } L^2(\mathbb{R}))$$

quelle que soit la fonction f de $L^1(\mathbb{R})$ (resp. de $L^2(\mathbb{R})$).

Etant donné que l'on a $L^1 * L^1 \subset L^1$ et $L^1 * L^2 \subset L^2$, les produits de composition et les convergences qui interviennent dans la définition ont bien un sens.

Rappelons aussi que ces convergences concernent les normes naturelles définies sur les espaces $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$; elles signifient donc, respectivement

$$\lim_{m\to+\infty} \|f_m * f - f\|_1 \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \lim_{m\to+\infty} \|f_m * f - f\|_2 \;=\; 0$$

selon que $f \in L^1(\mathbb{R})$ ou $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Ces « unités approchées » sont définies pour pallier la non existence [1] d'une « vraie unité », à savoir d'une fonction intégrable δ qui serait telle que $\delta * f = f$ pour toute fonction intégrable (resp. de carré intégrable) f. En fait, une telle unité existe bel et bien, mais dans le cadre des distributions (distribution de Dirac !) On va voir plus comment construire de telles unités approchées et ces exemples illustreront bien le « phénomène Dirac ».

Le résultat suivant donne des conditions suffisantes sur une suite de fonctions intégrables pour qu'elle soit effectivement une unité approchée de composition.

Proposition 4.4.2. *Soit une suite de fonctions f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ telle que*
- *$f_m \in L^1(\mathbb{R})$, $f_m \geq 0$ et $\|f_m\|_1 = 1$ pour tout m*
- *pour tout $R > 0$, on a*

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{|x|>R} f_m(x)\ dx \;=\; 0.$$

Alors cette suite constitue une unité approchée de composition dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$.

Preuve. Considérons tout d'abord le cas des fonctions intégrables et prenons donc $f \in L^1(\mathbb{R})$. On a successivement

$$\begin{aligned}
\|f_m * f - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |(f_m * f)(y) - f(y)|\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\, f(y-x)\ dx \;-\; f(y) \right| dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\, f(y-x)\ dx) \;-\; \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\, f(y)\ dx \right| dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ (f(y-x) - f(y))\ dx \right| dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ |f(y-x) - f(y)|\ dx \right) dy.
\end{aligned}$$

1. Si une telle fonction existait, alors on aurait $\delta * \chi_[a, b] = \chi_{[a,b]}$ pp donc aussi, par continuité, en tout réel différent de a, b donc aussi en a, b étant donné que l'image de fonction caractéristique est $\{0, 1\}$. Ceci est absurde car $\delta * \chi_[a, b]$ est continu et pasla fonction caractéristique

Cela étant, comme la fonction de deux variables $(x,y)\mapsto f_m(x)\ |f(y-x)-f(y)|$ est intégrable, on peut permuter l'ordre d'intégration sans changer la valeur de l'intégrale et on obtient ainsi

$$\|f_m * f - f\|_1 \ \leq \ \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y-x)-f(y)|\ \ dy\right) dx \ = \ \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ \|f(.-x)-f(.)\|_1\, dx.$$

On va alors utiliser la seconde hypothèse sur la suite f_m $(m\in\mathbb{N}_0)$ en faisant appel tout d'abord au théorème d'approximation. Si $\varepsilon>0$, il existe $R>0$ tel que

$$\|f(.-x)-f(.)\|_1 \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \text{ tel que } |x|\leq R.$$

Dès lors

$$\begin{aligned}
\|f_m * f - f\|_1 \ &\leq \ \int_{|x|>R} f_m(x)\ \|f(.-x)-f(.)\|_1\, dx \ + \ \int_{|x|\leq R} f_m(x)\ \|f(.-x)-f(.)\|_1\ \ dx \\
&\leq \ 2\,\|f\|_1 \int_{|x|>R} f_m(x)\ dx \ + \ \frac{\varepsilon}{2}\int_{|x|\leq R} f_m(x)\ dx \\
&\leq \ 2\,\|f\|_1 \int_{|x|>R} f_m(x)\ dx \ + \ \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

L'utilisation de la seconde hypothèse sur la suite f_m fournit ainsi M tel que le premier terme du second membre soit inférieur à $\varepsilon/2$ quel que soit $m\geq M$ donc finalement

$$\|f_m * f - f\|_1 \ \leq \ \varepsilon \quad \forall m\geq M$$

et on conclut.

Passons au cas des fonctions de carré intégrable et prenons donc $f\in L^2(\mathbb{R})$. Le même développement que dans le cas précédent mais en utilisant bien sûr la norme L^2 donne

$$\begin{aligned}
\|f_m * f - f\|_2^2 \ &= \ \int_{\mathbb{R}} |(f_m * f)(y)-f(y)|^2\ \ dy \\
&= \ \int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ (f(y-x)-f(y))\ \ dx\right|^2\ dy \\
&\leq \ \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ |f(y-x)-f(y)|\ \ dx\right)^2 dy.
\end{aligned}$$

Cela étant, on a

$$f_m(x)\ |f(y-x)-f(y)| \ = \ \sqrt{f_m(x)}\ \sqrt{f_m(x)}\,|f(y-x)-f(y)|$$

avec $\sqrt{f_m}$ de carré intégrable et $x\mapsto \sqrt{f_m(x)}\,|f(y-x)-f(y)|$ également de carré intégrable car par exemple

$$f_m(x)\ |f(y-x)-f(y)|^2 \ \leq \ 2\,f_m(x)\ \left(|f(y-x)|^2+|f(y)|^2\right)$$

avec $x\mapsto f_m(x)\ \left(|f(y-x)|^2+|f(y)|^2\right)$ intégrable pour presque tout y (puisque f_m est intégrable et f est de carré intégrable (repenser encore au cas $L^1 * L^1$)). Notons au passage (cela sera utilisé ci-dessous) que la fonction de deux variables

$$(x,y)\mapsto f_m(x)\ \left(|f(y-x)|^2+|f(y)|^2\right)$$

est intégrable également. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ |f(y-x)-f(y)|\ dx\right)^2 &\leq \|\sqrt{f_m}\|_2^2 \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ |f(y-x)-f(y)|^2\ dx\\ &= \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ |f(y-x)-f(y)|^2\ dx.\end{aligned}$$

On a donc obtenu

$$\|f_m * f - f\|_2^2 \leq \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ |f(y-x)-f(y)|^2\ dx\right)\ dy.$$

Cela étant, une permutation de l'ordre d'intégration (justification ci-dessus) donne

$$\begin{aligned}\|f_m * f - f\|_2^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\left(\int_{\mathbb{R}} |f(y-x)-f(y)|^2\ dy\right)\ dx\\ &= \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ \|f(.-x)-f(.)\|_2^2\ \ dx\end{aligned}$$

et on termine la preuve comme dans le cas L^1 mais en utilisant bien sur le théorème d'approximation dans $L^2(\mathbb{R})$. □

Occupons-nous maintenant du cas L^∞. Nous ne donnons que le cas qui sera utilisé plus loin, dans le chapitre consacré à la transformation de Fourier des fonctions intégrables.

Proposition 4.4.3. *Soit une suite de fonctions f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ telle que*
- *$f_m \in L^1(\mathbb{R})$, $f_m \geq 0$ et $\|f_m\|_1 = 1$ pour tout m*
- *pour tout $R > 0$, on a*

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{|x|>R} f_m(x)\ dx\ =\ 0.$$

Alors pour toute fonction f bornée sur $\mathbb{R}$ et uniformément continue sur $\mathbb{R}$, la suite $f_m * f$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

Preuve. Comme dans le cas L^1, L^2, on a

$$(f_m * f)(y) - f(y)\ =\ \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ (f(y-x)-f(y))\ dx$$

donc

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}|(f_m * f)(y) - f(y)|\ \leq\ \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ \sup_{y\in\mathbb{R}}|f(y-x)-f(y)|\ dx$$

Dans le cas L^1 ou L^2, le théorème d'approximation permettait de continuer. Ici, on travaille avec L^∞ (borne supérieure dans l'intégrale ci-dessus) et on ne peut pas continuer de la sorte. L'hypothèse supplémentaire va permettre de conclure, avec les mêmes développements.

Si $\varepsilon > 0$, l'hypothèse supplémentaire (qui pallie donc le manque de théorème d'approximation) donne l'existence de $R > 0$ tel que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}|f(x-y)-f(y)|\ \leq \frac{\varepsilon}{2}\quad \forall x \text{ tel que } |x| \leq R.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
&\sup_{y\in\mathbb{R}} |(f_m * f)(y) - f(y)| \\
&\leq \int_{|x|>R} f_m(x) \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(y-x) - f(y)| \ dx \ + \ \int_{|x|\leq R} f_m(x) \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(y-x)-f(y)| \ dx \\
&\leq 2\,\|f\|_\infty \int_{|x|>R} f_m(x)\ dx \ + \ \frac{\varepsilon}{2} \int_{|x|\leq R} f_m(x)\ dx \\
&\leq 2\,\|f\|_\infty \int_{|x|>R} f_m(x)\ dx \ + \ \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

L'utilisation de la seconde hypothèse sur la suite f_m fournit ainsi M tel que le premier terme du second membre soit inférieur à $\varepsilon/2$ quel que soit $m \geq M$ donc finalement

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |(f_m * f)(y) - f(y)| \leq \ \varepsilon \quad \forall m \geq M$$

et on conclut. □

Donnons à présent des exemples, en fait une construction standard d'une unité approchée de composition.

Exemple(s) 4.4.4. *Si f est une fonction intégrable, à valeurs positives et d'intégrale égale à 1, alors la suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ définie par $f_m(x) = mf(mx)$ est une suite de fonctions intégrables, à valeurs positives, d'intégrale égale à 1 et qui est telle que, pour tout $R > 0$, on a*

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{|x|>R} f_m(x)\ dx \ = \ 0.$$

Preuve. Il est immédiat de constater qu'effectivement on a une suite de fonctions intégrables, à valeurs positives, d'intégrale égale à 1. Soit alors $R > 0$.On a

$$\int_{|x|>R} f_m(x)\ dx \ = \ m\int_{|x|>R} f(mx)\ dx \ = \ m\int_{|t|>mR} \frac{1}{m} f(t)\ dt \ = \ \int_{|t|>mR} f(t)\ dt$$

avec

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{|t|>mR} f(t)\ dt \ = \ 0$$

puisque f est intégrable. On peut donc conclure. □

On peut alors ≪ voir ≫ l'illustration de l'effet ≪ Dirac ≫. AJOUT dessin (voir cours)

4.5 ≪ Extension ≫ du produit de composition

Introduction des espaces L^p_{comp} et L^p_{loc}. Voir aussi cours enseigné et notes de J. Schmets (chapitre 5).

Convention : Si h est une fonction définie (presque partout) sur $\mathbb{R}^n$, on note $[h]$ son support (presque partout). Il est immédiat de voir que $h = h\chi_{[h]}$.

Propriété(s) 4.5.1. *Lorsque $p, q, r \in \{1, 2, \infty\}$ avec $(1/p)+(1/q) = 1+(1/r)$ (avec convention), on a*

$$L^p_{comp} * L^q_{loc} \subset L^r_{loc}$$

Preuve. Soient $f \in L^p_{comp}$ et $g \in L^q_{loc}$. Si y est fixé, on a

$$f(y-x) \;=\; f(y-x)\,\chi_{[f]}(y-x) \;=\; f(y-x)\,\chi_{y-[f]}(x).$$

Cela étant, si $y \in K \subset \mathbb{R}^n$ on a

$$f(y-x) \;=\; f(y-x)\,\chi_{y-[f]}(x) \;=\; f(y-x)\,\chi_{K-[f]}(x)$$

car si $x \in y-[f]$ alors $x \in K-[f]$ et si $x \notin y-[f]$ alors $y-x \notin [f]$ donc $f(y-x)=0$. On obtient donc, lorsque $y \in K$

$$\begin{aligned} f(y-x)\,g(x) &= f(y-x)\,\chi_{K-[f]}(x)\;g(x) \\ &= f(y-x)\;\left(g\chi_{K-[f]}\right)(x) \\ &= f(y-x)\,G(x) \end{aligned}$$

avec $G = g\chi_{K-[f]}$. Comme $[f]$ est compact, l'ensemble $K-[f]$ est également compact lorsque K est compact. Cela implique que $G \in L^q$ puisque $g \in L^q_{loc}$. Vu l'inclusion $L^p * L^q \subset L^r$, on a donc $f*G \in L^r$. Finalement, si $y \in K$, en intégrant les deux membres des égalités $f(y-x)\,g(x) = f(y-x)\,G(x)$ $(y \in K, x \in \mathbb{R})$ obtenues ci-dessus, on obtient

$$(f*g)(y) \;=\; (f*G)(y)$$

ou encore

$$(f*g)\,\chi_K \;=\; (f*G)\,\chi_K \;\in\; L^r.$$

On peut donc conclure que $f*g \in L^r_{loc}$.□

4.6 Régularisations

Le produit de composition de fonctions permet de « régulariser » (au sens dérivabilité) une fonction comme on va le voir ci-dessous.

Commençons par une propriété sur le support d'un produit de composition et par un résultat donnant des conditions suffisantes sur f, g pour que $f*g$ soit dérivable. On poursuivra par une « régularisation » du théorème d'approximation et par un résultat appelé « régularisation d'un ensemble », lequel est abondamment exploité notamment dans le cours sur les distributions (masters).

Propriété(s) 4.6.1. *Si f et g sont composables, alors*

$$[f*g] \;\subset \overline{[f]+[g]}$$

Si le support de f ou de g est compact, alors la somme des supports est fermée et on peut donc enlever l'adhérence.

Preuve. Etablissons ce résultat pour les supports. Le cas des supports presque partout se traite de même.

Posons $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus (\overline{[f]+[g]})$. Pour conclure, il suffit de montrer que cet ouvert est d'annulation pour $f*g$. Soit donc $y \in \Omega$. On a

$$\begin{aligned} (f*g)(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)\,g(x)\;dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)\,g(x)\;\chi_{[f]}(y-x)\,\chi_{[g]}(x)\;dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)\,g(x)\;\chi_{(y-[f])\cap[g]}(x)\;dx \end{aligned}$$

et comme $y \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus ([f]+[g])$, on a $(y-[f]) \cap [g] = \emptyset$ donc $(f*g)(y)=0$.

La preuve du fait que la somme d'un fermé et d'un compact de $\mathbb{R}^n$ soit fermée est directe.□

Propriété(s) 4.6.2 (Dérivabilité)**.** *Le produit de composition $f*g$ appartient à $C_L(\mathbb{R}^n)$ lorsque (1) $f \in L^1_{comp}$ et $g \in C_L(\mathbb{R}^n)$ ou (2) $f \in L^1_{loc}$, $g \in C_L(\mathbb{R}^n)$ et $[g]$ compact. Dans ce cas on a*

$$D^\alpha(f*g) \;=\; f*D^\alpha g \quad \forall \alpha, |\alpha| \le L$$

Preuve. C'est direct en utilisant le théorème de dérivation des intégrales paramétriques.□

Nous allons maintenant montrer comment le produit de composition permet d'approcher (au sens des normes) des fonctions non régulières par des fonctions régulières.

Dans ce qui suit, nous utilisons la notation $d(x,E)$ pour désigner la distance entre un point $x \in \mathbb{R}^n$ et un ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$ et, si $r>0$, on définit E_r par

$$E_r \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n \;=\; d(x,E) \le r\}\,.$$

On définit aussi les fonctions ρ_ε ($\varepsilon > 0$) de la façon suivante

$$\rho_\varepsilon(x) \;=\; \frac{1}{\varepsilon^n}\,\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

avec $\rho \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$, $[\rho] \subset b(1)$ (boule de rayon 1 centrée à l'origine), $\rho \ge 0$ et $\|\rho\|_1 = 1$.

Cela étant, on a le résultat suivant.

Propriété(s) 4.6.3 (« Régularisation d'un ensemble »)**.** *Pour tout ensemble non vide E et tout $\varepsilon > 0$, la fonction $f_\varepsilon = \chi_{E_\varepsilon} * \rho_\varepsilon$ possède les propriétés suivantes*

1. $f_\varepsilon \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$
2. $0 \le f_\varepsilon \le 1$
3. $f_\varepsilon = 1$ *sur l'adhérence de E et* $f_\varepsilon = 0$ *sur le complémentaire de* $E_{2\varepsilon}$
4. $\forall \alpha$, *il existe* $C_\alpha > 0$ *tel que*
$$|D^\alpha f_\varepsilon| \;\le\; C_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|}.$$

Preuve. Considérons le cas $n=1$.

Comme χ_{E_ε} est localement intégrable et ρ_ε indéfiniment continûment dérivable à support compact, la fonction $f_\varepsilon = \chi_{E_\varepsilon} * \rho_\varepsilon$ appartient bien à $C_\infty(\mathbb{R})$.

Pour tout x on a aussi directement

$$0 \;\le\; (\chi_{E_\varepsilon} * \rho_\varepsilon)(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \chi_{E_\varepsilon}(x-y)\,\rho_\varepsilon(y)\;dy \;\le\; \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(y) \;=\; 1.$$

Cela étant, pour tous x, y, on a

$$\begin{aligned}
\chi_{E_\varepsilon}(y)\,\rho_\varepsilon(x-y) &= \chi_{E_\varepsilon}(y)\,\rho_\varepsilon(x-y)\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x-y)\\
&= \chi_{E_\varepsilon}(y)\,\rho_\varepsilon(x-y)\chi_{[x-\varepsilon,x+\varepsilon]}(y)\\
&= \rho_\varepsilon(x-y)\chi_{E_\varepsilon \cap [x-\varepsilon,x+\varepsilon]}(y).
\end{aligned}$$

Si $x \in E$ alors $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset E_\varepsilon$ donc

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) \;=\; (\chi_{E_\varepsilon} * \rho_\varepsilon)(x) \;&=\; \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-y)\chi_{E_\varepsilon \cap [x-\varepsilon, x+\varepsilon]}(y)\; dy \\ &=\; \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-y)\chi_{[x-\varepsilon, x+\varepsilon]}(y)\; dy \\ &=\; \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-y)\; dy \;=\; 1 \end{aligned}$$

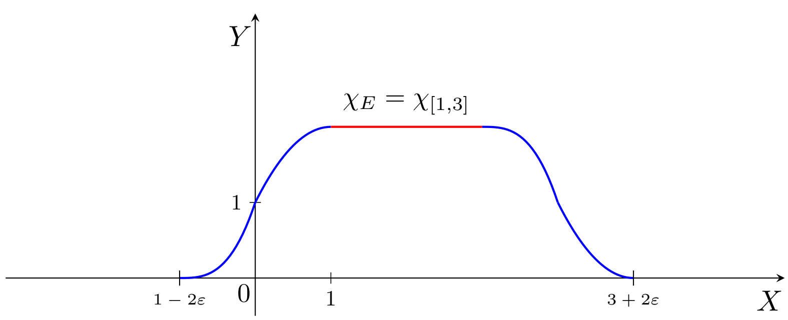
et si $x \notin E_{2\varepsilon}$ alors $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap E_\varepsilon$ donc

$$f_\varepsilon(x) \;=\; (\chi_{E_\varepsilon} * \rho_\varepsilon)(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-y)\chi_{E_\varepsilon \cap [x-\varepsilon, x+\varepsilon]}(y) \;=\; 0.$$

La fonction f_ε est bien sûr bornée par 1. Pour conclure, il reste donc à examiner les dérivées. Quels que soient $\alpha \in \mathbb{N}_0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a successivement

$$\begin{aligned} |D^\alpha f_\varepsilon(x)| \;&=\; |(\chi_{E_\varepsilon} * D^\alpha \rho_\varepsilon)(x)| \\ &\leq\; \int_{\mathbb{R}} |(D^\alpha \rho_\varepsilon)(y)|\; dy \\ &=\; \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |D^\alpha(\rho(y/\varepsilon))|\; dy \\ &=\; \frac{1}{\varepsilon^{1+\alpha}} \int_{\mathbb{R}} |(D^\alpha \rho)(y/\varepsilon)|\; dy \\ &=\; \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} |(D^\alpha \rho)(t)|\; dt \end{aligned}$$

et on conclut. □



Propriété(s) 4.6.4 (Théorème d'approximation « régularisé »)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $f \in L^1(\Omega)$ (resp. $f \in L^2(\Omega)$) et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact* **dans** *Ω tel que*

$$\|f-\varphi\|_1 \leq \varepsilon \quad (\textit{ resp.} \quad \|f-\varphi\|_2 \leq \varepsilon)$$

Preuve. Ici, la notation $\|.\|$ désigne la norme dans L^1 ou dans L^2. Considérons aussi une unité approchée de composition dans L^1 et L^2 du type $\rho_m = m\rho(m.)$ ($m \in \mathbb{N}_0$) comme dans le cas de la « régularisation d'un ensemble ».

Soient alors$f \in L^1(\Omega)$ (resp. $L^2(\Omega)$) et $\varepsilon > 0$. Par le théorème d'approximation, il existe une fonction étagée F dans Ω telle que

$$\left\| f - F \right\| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ensuite, on a

$$\lim_{m\to+\infty} \|F - F * \rho_m\| \;=\; 0$$

avec

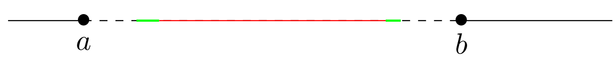
$$supp(F * \rho_m) \;\subset\; supp(F) + b(1/m).$$

Dès lors, il existe M tel que le support de la fonction $F * \rho_M$ soit un compact inclus dans Ω et $\|F - F * \rho_M\| \leq \varepsilon/2$. Il s'ensuit que

$$\|f - F * \rho_M| \;\leq\; \|f - F\| + \|F - F * \rho_M\| \;\leq\; \varepsilon$$

et on conclut puisque $F * \rho_M$ appartient à $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ et est à support compact **dans** Ω. $\square$

Ci-dessous, illustration dans le cas $n = 1$: $\Omega =]a, b[$, le support (compact inclus dans$]a, b[$) de la fonction étagée F est inclus dans l'intervalle en rouge et le support de $F * \rho_M$ est inclus dans l'intervalle constitué du rouge et des deux « ajouts » en vert (longueur de chaque vert : $1/M$).



4.7 Propriété d'annulation

Propriété(s) 4.7.1 (« Annulation »). *Soit f une fonction localement intégrable dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Alors f est nul presque partout si et seulement si*

$$\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\;dx \;=\; 0$$

quelle que soit la fonction $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact dans Ω.

Preuve. Il est clair que si f est nul, alors les intégrales sont nulles également.

Considérons alors que toutes ces intégrales sont nulles. Prenons une fonction $\psi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact dans $b(1)$, à valeurs positives et d'intégrale égale à 1. On sait que les fonctions ψ_m définies par $\psi_m(x) = m^n\psi(mx)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ forment une unité approchée de composition dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ donc que l'on a

$$\lim_{m\to+\infty} (f\chi_\Omega) * \psi_m \;=\; f\chi_\Omega$$

dans L^1 et presque partout pour une sous-suite. Cela étant, pour tout m on a

$$((f\chi_\Omega) * \psi_m)(x) \;=\; \int_\Omega f(y)\,\psi_m(x-y)\;dy \;=\; \int_{\Omega\cap[x-1/m,x+1/m]} f(y)\,\psi_m(x-y)\;dy.$$

Lorsque x est dans Ω, on a $supp(\psi_m(x - .)) \subset b(x, 1/m) \subset \Omega$ pour m assez grand [2]donc

$$((f\chi_\Omega) * \psi_m)(x) \;=\,=\; \int_\Omega f(y)\,\psi_m(x-y)\;dy \;=\; 0.$$

Vu la convergence presque partout vers $f\psi_\Omega$ pour une sous-suite, on obtient finalement que f est nul presque partout dans Ω. $\square$

2. $b(x, r)$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ désigne la boule fermée centrée en x et de rayon r

Chapitre 5

Transformation de Fourier dans L^1

Voir aussi le cours enseigné et les notes de J. Schmets (chapitre 6)

5.1 Définition et interprétation

Donnons tout d'abord l'introduction suivante, récupérée dans wikipedia.

En analyse, la transformation de Fourier est une extension, pour les fonctions non périodiques, du développement en série de Fourier des fonctions périodiques. La transformation de Fourier associe à une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes, une autre fonction sur $\mathbb{R}$ appelée transformée de Fourier dont la variable indépendante peut s'interpréter en physique comme la fréquence ou la pulsation.

La transformée de Fourier représente une fonction par la densité spectrale dont elle provient, en tant que moyenne de fonctions trigonométriques de toutes fréquences. La théorie de la mesure ainsi que la théorie des distributions permettent de définir rigoureusement la transformée de Fourier dans toute sa généralité, elle joue un rôle fondamental dans l'analyse harmonique.

Lorsqu'une fonction représente un phénomène physique, comme l'état du champ électromagnétique ou du champ acoustique en un point, on l'appelle signal et sa transformée de Fourier s'appelle son spectre.

Pour illustrer cette introduction, voir la fin de cette section.

Dans ce qui suit, on utilise la notation $< .,. >$ pour le produit scalaire habituel sur R^n, à savoir

$$< x, y > = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

avec $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 5.1.1. *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$. La transformée de Fourier ≪ négative ≫ de f est la fonction*

$$\mathcal{F}^- f \ : \ y \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} f(x) \ dx$$

et la transformée de Fourier ≪ positive ≫ de f est la fonction

$$\mathcal{F}^+ f \ : \ y \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,y>} f(x) \ dx.$$

Pour la valeur en y de ces fonctions, on utilise les notations

$$\mathcal{F}_y^- f, \quad \mathcal{F}_y^+ f$$

ou encore

$$\left(\mathcal{F}^- f\right)(y), \quad \left(\mathcal{F}^+ f\right)(y).$$

Notons que cette définition a bien un sens puisque pour tout y, la fonction $x \mapsto e^{\pm i<x,y>} f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ puisqu'en module c'est $|f|$.

Remarque 5.1.2. *Pour toute fonction f intégrable sur $\mathbb{R}^n$, on a*

$$\mathcal{F}_y^- f \;=\; \mathcal{F}_{-y}^+ f \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve. Il s'agit d'une simple écriture différente pour l'expression

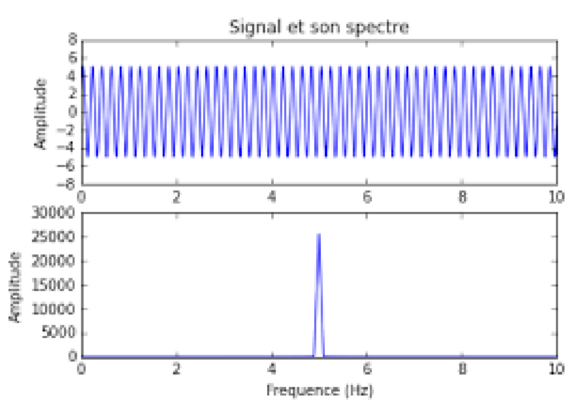
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} f(x)\, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,-y>} f(x)\, dx.$$

□

Pour illustrer un peu l'introduction qui met l'accent sur l'aspect fréquentiel de la transformation de Fourier, notons que, pour tout $r > 0$ (indispensable de recouper le cosinus, lequel n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$)

$$\mathcal{F}_y^{\pm}\left(\cos \chi_{[-r,r]}\right) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\sin(r(y+1))}{y+1} + \dfrac{\sin(r(y-1))}{y-1} & \text{si } y \neq 1,\ y \neq -1 \\ \dfrac{\sin(2r)}{2} + r & \text{si } y = 1 \text{ et si } y = -1 \end{cases}$$

La plus grande valeur de cette transformée de $x \mapsto \cos(\mathbf{1}x) = \cos(-\mathbf{1}x)$ est donc en -1 et 1, c'est-à-dire qu'il y a un « pic » en ces points. En théorie des distributions où l'on peut vraiment prendre la transformée de Fourier de la distribution définie par le cosinus, on trouve effectivement les distributions de Dirac.



5.2 Exemples

Exemple(s) 5.2.1. *Transformation de Fourier de* $\chi_{[a,b]}$ *(*$a,b\in\mathbb{R}$*) et de* $e^{-a|.|}$ *(*$a>0$*) :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^{\pm}\chi_{[a,b]} &= \begin{cases} \dfrac{e^{\pm iby}-e^{\pm iay}}{\pm iy} & si\ y\neq 0\\ b-a & si\ y=0\end{cases}\\
\mathcal{F}_y^{\pm}e^{-a|.|} &= \frac{2a}{y^2+a^2}.
\end{aligned}$$

En particulier, pour tout $r>$*, on a*

$$\mathcal{F}_y^{\pm}\chi_{[-r,r]} = \begin{cases} \dfrac{2\sin(ry)}{y} & si\ y\neq 0\\ 2r & si\ y=0.\end{cases}$$

Preuve. Ce sont des calculs immédiats d'intégrales simples. □

Le premier exemple montre que la transformée de Fourier d'une fonction intégrable n'est pas nécessairement intégrable. Lorsqu'on aura besoin de cette propriété, on devra donc donner des conditions suffisantes pour avoir cette intégrabilité. Dans la suite, nous donnons les deux résultats les plus courants, bien utiles plus loin dans le cours.

Par ailleurs, ces deux exemples (ainsi que celui qui suit) conduisent à des transformées qui sont continues sur $\mathbb{R}$ et ont une limite nulle à l'infini. Ces propriétés sont en fait vraies pour toute transformée de Fourier de fonction intégrable, comme démontré dans la suite.

Voici alors un exemple qui se révèlera fondamental dans la preuve du théorème de Fourier.

Exemple(s) 5.2.2 (Le cas des fonctions gaussiennes)**.** *Pour tout* $a>0$ *on définit la gaussienne* g_a *par*

$$g_a(x) = e^{-a|x|^2},\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Cette fonction est intégrable et on a

$$\mathcal{F}^{\pm}g_a = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} g_{1/(4a)} \quad partout.$$

On en déduit que

$$\mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm}g_a = (2\pi)^n\, g_a \quad partout.$$

Preuve. L'intégrabilité est claire : on a

$$g_a(x) = \prod_{j=1}^n e^{-ax_j^2} = \prod_{j=1}^n g_a(0,\ldots,x_j,\ldots,0)$$

avec $G_a:\ x\mapsto g_a(0,\ldots,x,\ldots,0)=e^{-ax^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$.

Cela étant, traitons le cas $n=1$; on en déduira le cas général. On a directement (on se réfère à une intégrale « remarquable » obtenue par le théorème de dérivation des intégrales paramétriques), quel que soit $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^{\pm} G_a &= \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy}\, e^{-ax^2}\, dx \\
&= 2\int_0^{+\infty} \cos(xy)\, e^{-ax^2}\, dx \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-y^2/(4a)} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, G_{(4a)^{-1}}(y).
\end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}^n$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^{\pm} g_a &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>}\, e^{-a|x|^2}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n e^{\pm ix_j y_j}\, e^{-ax_j^2}\, dx \\
&= \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ix_j y_j}\, e^{-ax_j^2}\, dx_j \\
&= \prod_{j=1}^n \mathcal{F}_{y_j}^{\pm} G_a \\
&= \prod_{j=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, G_{(4a)^{-1}}(y_j) \\
&= \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^n g_{(4a)^{-1}}(y).
\end{aligned}$$

On vient donc de voir que la transformée de Fourier d'une gaussienne est un multiple d'une gaussienne. Reprenons alors la transformée de Fourier de cette transformée de Fourier, en utilisant l'expression générale qui vient d'être trouvée. Quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$, on a successivement [1]

$$\mathcal{F}_x^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} g_a = \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^n \mathcal{F}_x^{\mp} g_{(4a)^{-1}} = \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^n \left(\sqrt{\frac{\pi}{(4a)^{-1}}}\right)^n g_{(4(4a)^{-1})^{-1}}(x) = (2\pi)^n\, g_a(x)$$

et on conclut. □

5.3 Premières propriétés

Propriété(s) 5.3.1. *(1) La transformation de Fourier est un opérateur linéaire.*

(2) La transformée de Fourier d'une fonction intégrable f est une fonction bornée sur $\mathbb{R}^n$ car on a

$$|\mathcal{F}_y f| \;\leq\; \|f\|_1 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

(3) La transformée de Fourier d'une fonction intégrable est une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.

(4) (Riemann-Lebesgue) La transformée de Fourier d'une fonction intégrable tend vers 0 à l'infini.

1. Ici, les deux transformées de Fourier $\pm$ sont les mêmes car une gaussienne est paire ; cependant, pour le théorème de Fourier en toute généralité, cela ne sera pas toujours le cas et il importera de respecter l'alternance des ≪ signes ≫

Preuve. (1) C'est immédiat vu la linéarité de l'intégration.

(2) C'est immédiat car le module d'une exponentielle imaginaire pur est égal à 1 :

$$|\mathcal{F}_y f| \;=\; \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>}\, f(x)\; dx\right| \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{\pm i<x,y>}\right|\, |f(x)|\; dx \;=\; \|f\|_1 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

(3) Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a successivement

$$\begin{aligned}
\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{F}^{\pm}_{y+h} f - \mathcal{F}^{\pm}_y f\right| \;&=\; \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{\pm i<y+h,x>} - e^{\pm i<y,x>}\right) f(x)\; dx\right| \\
&=\; \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<y,x>} \left(e^{\pm i<h,x>} - 1\right) f(x)\; dx\right| \\
&\leq\; \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{\pm i<h,x>} - 1\right|\, |f(x)|\; dx.
\end{aligned}$$

Cela étant, comme

$$\left|e^{\pm i<h,x>} - 1\right|\, |f(x)| \;\leq\; 2\,|f(x)| \quad \forall h$$

et

$$\lim_{h\to 0} \left|e^{\pm i<h,x>} - 1\right| \;=\; 0 \quad \forall x$$

on a

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{\pm i<h,x>} - 1\right|\, |f(x)|\; dx \;=\; 0$$

donc

$$\lim_{h\to 0} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{F}^{\pm}_{y+h} f - \mathcal{F}^{\pm}_y f\right| \;=\; 0.$$

(4) Traitons tout d'abord le cas $n = 1$. Pour tout $y \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\pm}_y f \;&=\; \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy}\, f(x)\; dx \\
&=\; \int_{\mathbb{R}} e^{\pm i(t+\pi/y)y}\, f\left(t + \frac{\pi}{y}\right)\; dt \\
&=\; -\int_{\mathbb{R}} e^{\pm ity}\, f\left(t + \frac{\pi}{y}\right)\; dt.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\pm}_y f \;&=\; \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy}\, f(x)\; dx \;-\; \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ity}\, f\left(t + \frac{\pi}{y}\right)\; dt\right) \\
&=\; \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy} \left(f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{y}\right)\right)\; dx
\end{aligned}$$

donc

$$\left|\mathcal{F}^{\pm}_y f\right| \;\leq\; \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left|f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{y}\right)\right|\; dx.$$

Comme f est intégrable, le théorème d'approximation (une de ses conséquences plutôt) donne la conclusion.

Le cas général s'inspire du cas $n = 1$. De fait, pour tout j et tout $y_j \neq 0$, les mêmes calculs mais avec le changement de variable linéaire[2] $x = t + (\pi/y_j)e^{(j)}$ on a

$$\left|\mathcal{F}_y^{\pm} f\right| \;\leq\; \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{y_j} e^{(j)}\right)\right| \; dx.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. Ici encore, le théorème d'approximation (une de ses conséquences plutôt) donne $\eta > 0$ tel que

$$|h| \leq \eta \;\Rightarrow\; \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x+h)| \; dx \;\leq\; \varepsilon.$$

Par ailleurs, pour tout $r > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $|y| \geq r$, il existe j tel que $|y_j| \geq \sqrt{n}\, r$ ou encore

$$\frac{\pi}{|y_j|} \;\leq\; \frac{\pi}{\sqrt{n}\, r}.$$

Dès lors, avec

$$|y| \;\geq\; \eta, \qquad r \;=\; \frac{\pi}{\eta\sqrt{n}}, \qquad \text{et} \quad j \text{ tel que } |y_j| \geq \sqrt{n}\, r \;=\; \pi/\eta$$

on obtient

$$\left|\frac{\pi}{y_j}\, e^{(j)}\right| \;\leq\; \eta$$

donc

$$\left|\mathcal{F}_y^{\pm} f\right| \;\leq\; \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{y_j} e^{(j)}\right)\right| \; dx \;\leq\; \varepsilon$$

et on conclut. □

5.4 Transfert et produit de composition

Propriété(s) 5.4.1 (Produit de composition)**.** *Si f et g sont intégrables alors*

$$\mathcal{F}^{\pm}(f * g) \;=\; \mathcal{F}^{\pm} f \times \mathcal{F}^{\pm} g \quad \textit{partout.}$$

Preuve. Vu les résultats concernant le produit de composition de fonctions intégrables, on sait que $f * g$ existe et est une fonction intégrable ; on a même que la fonction de $2n$ variables $(y, t) \mapsto f(t)\, g(y - t)$ est intégrable. On a alors directement, quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_x^{\pm}(f * g) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>}\,(f * g)(y)\; dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, g(y-t)\; dt\right)\; dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>}\, g(y-t)\; dy\right)\; dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,t+u>}\, g(u)\; du\right)\; dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,t>} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,u>}\, g(u)\; du\right)\; dt \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,u>}\, g(u)\; du\right) \times \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,t>}\, f(t)\; dt\right) \\
&= \mathcal{F}_x g \times \mathcal{F}_x f.
\end{aligned}$$

2. $e^{(j)}$ est l'élément de $\mathbb{R}^n$ donc toutes les composantes sont nulles sauf la numéro j, qui vaut 1

□

Propriété(s) 5.4.2 (Transfert). *Si f et g sont intégrables alors*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_x^{\pm} f\ g(x)\ dx \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ \mathcal{F}_x^{\pm} g\ dx$$

Preuve. Il est clair que les deux membres de l'égalité ont un sens car le produit d'une fonction intégrable par une fonction bornée est intégrable.

Cela étant, une simple permutation de l'ordre d'intégration permet de conclure. De fait, la fonction $x \mapsto |f(y)|\,|g(x)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{2n}$ et on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_x^{\pm} f\ g(x)\ dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>}\ f(y)\ dy \right)\ g(x)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>}\ g(x)\ dx \right)\ f(y)\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_y^{\pm} g\ f(y)\ dy
\end{aligned}$$

□

5.5 Dérivation et transformation de Fourier

Propriété(s) 5.5.1. *(1) Si $f \in C_L(\mathbb{R}^n)$ et si $D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ quel que soit le multi-indice α tel que $|\alpha| \leq L$ alors*

$$\mathcal{F}_y^{\pm} D^\alpha f \ = \ (\mp iy)^\alpha\, \mathcal{F}_y^{\pm} f$$

(2) Si les fonctions $x \mapsto x^\alpha\, f(x)$ ($|\alpha| \leq L$) sont intégrables, alors $\mathcal{F}^{\pm} f \in C_L(\mathbb{R}^n)$ et, quel que soit le multi-indice α tel que $|\alpha| \leq L$, on a

$$D^\alpha \mathcal{F}_y^{\pm} f \ = \ (\pm i)^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha\, e^{\pm i<x,y>}\ f(x)\ dx.$$

Preuve. (1) Pour $L = 1$ et pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a directement (ce qui se simplifie bien sûr si $n = 1$),

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^{\pm} D_j f &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>}\ D_j f(x)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\pm i<x,y>}\ D_j f(x)\ dx_j \right)\ dx_1 \ldots [dx_j] \ldots dx_n \\
&= (\mp iy_j) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\pm i<x,y>}\ f(x)\ dx_j \right)\ dx_1 \ldots [dx_j] \ldots dx_n \\
&= (\mp iy_j)\, \mathcal{F}_y^{\pm} f
\end{aligned}$$

puisque, dans l'intégration par parties, les termes intégrés sont nuls. Le cas général s'effectue de même, en répétant la manoeuvre précédente.

(2) L'expression

$$\mathcal{F}_y^{\pm} f \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>}\ f(x)\ dx$$

est une intégrale paramétrique. Dans le cas présent, vu les hypothèses données, celles du théorème de dérivation sont clairement satisfaites et ainsi on obtient la dérivabilité et l'expression des dérivées en permutant dérivée et intégrale. □.

5.6 Intégration et transformation de Fourier

Propriété(s) 5.6.1. *Si une fonction intégrable est bornée et de transformée de Fourier à valeurs positives, alors sa transformée de Fourier est intégrable.*

Preuve. Soit f une telle fonction. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) \; = \; e^{-|x|^2/m} \, \mathcal{F}_x^{\pm} f.$$

Comme $\mathcal{F}^{\pm} f$ est à valeurs positives, cette suite est croissante ; de plus, elle converge partout vers $\mathcal{F}^{\pm} f$. Pour conclure à l'intégrabilité de cette limite ponctuelle, il suffit (par le théorème de Lévi (convergence monotone)) de montrer que les intégrales des f_m sont bornées indépendamment de m. Et c'est bien le cas car on a successivement

$$\begin{aligned}
0 \; \leq \; \int_{\mathbb{R}^n} f_m(x)\, dx \; &= \; \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/m} \, \mathcal{F}_x^{\pm} f \, dx \\
&= \; \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_x^{\pm} \left(e^{-|.|^2/m} \right) \, f(x)\, dx \quad \text{(transfert)} \\
&= \; \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\pi}{1/m} \right)^{n/2} e^{-m|x|^2/4} \, f(x)\, dx \quad \text{(transf. de Fourier d'une gaussienne)} \\
&= \; \pi^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|t|^2/4} \, f(t\sqrt{m})\, dt \quad \text{(chgt. de var. } \sqrt{m}\, x = t) \\
&= \; \pi^{n/2} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|t|^2/4} \, f(t\sqrt{m})\, dt \right| \\
&\leq \; \pi^{n/2} \, \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|t|^2/4} \, dt.
\end{aligned}$$

□

Propriété(s) 5.6.2. *Si $f \in C_{n+1}(\mathbb{R}^n)$ est tel que $D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq n+1$, alors $\mathcal{F}^{\pm} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Notons tout d'abord que l'on a la continuité de la fonction dont on veut montrer l'intégrabilité.

Cela étant, pour $n = 1$ c'est immédiat car

$$|x|^2 \left| \mathcal{F}_x^{\pm} f \right| \; = \; \left| x^2 \, \mathcal{F}_x^{\pm} f \right| \; = \; \left| \mathcal{F}_x^{\pm} D^2 f \right| \; \leq \; C \quad \forall x$$

donc, pour tout $x \neq 0$, on a

$$\left| \mathcal{F}_x^{\pm} f \right| \; \leq \; \frac{C}{x^2}$$

et on conclut étant donné l'intégrabilité de $x \mapsto 1/x^2$ à l'infini.

Pour le cas $n > 1$, pour imiter ce qui se passe pour $n = 1$, on doit regarder comment estimer $|x|^\alpha \, |\mathcal{F}_x^{\pm} f|$ en utilisant les égalités $|x^\alpha \; \mathcal{F}_x^{\pm} f| = |\mathcal{F}_x^{\pm} D^\alpha f|$. Nous allons alors regarder comment se comparent

$$|x|^M \quad \text{et} \quad g_M(x) = \sum_{|\alpha| = M} |x^\alpha|$$

pour M naturel strictement positif. Pour rappel, pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ et $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$. Posons

$$S \; = \; \{ x \in \mathbb{R}^n \; : \; |x| = 1 \} \, .$$

L'ensemble S est un compact de $\mathbb{R}^n$ et $g_M > 0$ sur S donc

$$\inf_{x\in S} g_M(x) = r_M > 0.$$

Ainsi, pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{g_M(x)}{|x|^M} = \sum_{|\alpha|=M} \frac{|x^\alpha|}{|x|^{\alpha_1}\dots|x|^{\alpha_n}} = \sum_{|\alpha|=M} \frac{|x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}|}{|x|^{\alpha_1}\dots|x|^{\alpha_n}} = \sum_{|\alpha|=M} \left|\frac{x_1^{\alpha_1}}{|x|^{\alpha_1}}\dots\frac{x_n^{\alpha_n}}{|x|^{\alpha_n}}\right| = g_M(x^*)$$

avec

$$x^* = \left(\frac{x_1^{\alpha_1}}{|x|^{\alpha_1}}, \dots, \frac{x_n^{\alpha_n}}{|x|^{\alpha_n}}\right) \quad \text{tel que} \quad |x^*| = 1 \quad (\text{donc } x^* \in S);$$

on obtient donc

$$\frac{g_M(x)}{|x|^M} = g_M(x^*) \geq r_M$$

ce qui est équivalent à

$$g_M(x) = \sum_{|\alpha|=M} |x^\alpha| \geq r_M\,|x|^M;$$

notons que cette dernière inégalité est bien sûr toujours valable si $x = 0$.

On obtient donc, quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|x|^{n+1}\left|\mathcal{F}_x^\pm f\right| \leq \frac{1}{r_{n+1}} \sum_{|\alpha|=n+1} |x^\alpha|\,\left|\mathcal{F}_x^\pm f\right| = \frac{1}{r_{n+1}} \sum_{|\alpha|=n+1} \left|\mathcal{F}_x^\pm D^\alpha f\right|$$

et on conclut comme dans le cas $n = 1$ car vu le changement de variable en coordonnées polaires [3], la fonction $x \mapsto 1/(1 + |x|^{n+1})$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. □

5.7 Théorème de Fourier

Théorème 5.7.1. *Si f est intégrable et de transformée de Fourier intégrable, on a*

$$\mathcal{F}^\mp\mathcal{F}^\pm f = (2\pi)^n f$$

presque partout. Cette égalité est valable partout si f est continu sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Pour démontrer cela, on utilise une unité approchée de composition formée de gaussiennes. Soit

$$g(x) = \pi^{-n/2}\, e^{-|x|^2} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Cette fonction est intégrable, à valeurs positives et d'intégrale égale à 1 ; il s'ensuit que les fonctions g_m ($m \in \mathbb{N}_0$) définies par $g_m(x) = m^n g(mx)$ forment une unité approchée de composition. Dès lors, on a

$$\lim_{m\to+\infty} F * g_m = F \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^n)$$

3. Pour rappel, pour quelles valeurs du réel s la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1+|x|^s}$$

est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^n$? Vu le changement de variable en coordonnées polaires dont le déterminant jacobien est un produit de fonctions sinus, cosinus et de r^{n-1}, à considérer sur un produit cartésien d'intervalles bornés pour les fonctions trigonométriques et de $]0, +\infty[$ pour ce qui est de la variable r, on obtient donc que la fonction ci-dessus est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $s - n + 1 \geq 0$ puisque on doit examiner l'intégrabilité en $+\infty$ de $r \mapsto r^{n-1}/(1 + r^s)$.

quelle que soit la fonction $F \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$\lim_{m\to+\infty} F * g_m \;=\; F$$

uniformément sur $\mathbb{R}^n$ quelle que soit la fonction F bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.

Cela étant, le théorème étant exact pour les gaussiennes (voir l'exemple 5.2.2), quel que soit m, on a

$$f * g_m \;=\; \frac{1}{(2\pi)^n}\, f * \mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} g_m.$$

Le coeur technique de la preuve consiste à montrer que (penser au transfert !), que quel soit m, on a

$$f * \mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} g_m \;=\; (\mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} f) * g_m. \qquad (*)$$

Si on a effectivement cela, alors on conclut rapidement. De fait, en utilisant les rappels précédents concernant les unités approchées de composition, on a d'une part

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\lim_{m\to+\infty}(\mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} f) * g_m \;=\; \frac{1}{(2\pi)^n}\,\mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} f$$

uniformément sur $\mathbb{R}^n$ et d'autre part

$$\lim_{m\to+\infty} f * g_m \;=\; f$$

dans L^1 donc presque partout pour une sous-suite. Par unicité de la limite presque partout, à partir des égalités

$$f * g_m \;=\; \frac{1}{(2\pi)^n}\, f * \mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} g_m \;=\; \frac{1}{(2\pi)^n}\,(\mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} f) * g_m$$

on obtient dès lors

$$f \;=\; \frac{1}{(2\pi)^n}\,\mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} f$$

presque partout.

Montrons donc que l'on a (*). Il s'agit effectivement d'utiliser le transfert, mais dans un contexte un peu différent du résultat « brut » lui même car des translations interviennent. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a successivement

$$\begin{aligned}
\left(f * \mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} g_m\right)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\; \mathcal{F}^{\mp}_y\mathcal{F}^{\pm} g_m \; dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{\mp}_y\left(f(x-.)\right)\; \mathcal{F}^{\pm}_y g_m \; dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{\mp i<x,y>}\, \mathcal{F}^{\pm}_y f\right)\; \mathcal{F}^{\pm}_y g_m \; dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{\pm}_y \left(e^{\mp i<x,.>}\, \mathcal{F}^{\pm}_{.} f\right)\; g_m(y)\; dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\mp i<t,x-y>}\, \mathcal{F}^{\pm}_t f \; dt\right)\; g_m(y)\; dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{\mp}_{x-y}\mathcal{F}^{\pm} f \quad g_m(y)\; dy\\
&= \left(\left(\mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} f\right) * \; g_m\right)(x)
\end{aligned}$$

donc on peut conclure. □

5.8 ≪ Transition ≫ pour L^2

Propriété(s) 5.8.1. *(1) Si* $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *alors* $\mathcal{F}^{\pm} f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(2) Quels que soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$*, on a*

$$< \mathcal{F}^{\pm} f, \mathcal{F}^{\pm} g > \; = \; (2\pi)^n \; < f, g > .$$

En particulier

$$\left\| \mathcal{F}^{\pm} f \right\|_2^2 \; = \; (2\pi)^n \; \left\| f \right\|_2^2 \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. (1) On a

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{F}_y^{\pm} f \right|^2 &= \mathcal{F}_y^{\pm} f \times \overline{\mathcal{F}_y^{\pm} f} \\ &= \mathcal{F}_y^{\pm} f \times \mathcal{F}_y^{\pm} \left(\overline{f}(-.) \right) \\ &= \mathcal{F}_y^{\pm} \left(f * \overline{f}(-.) \right). \end{aligned}$$

Cela étant, comme la fonction intégrable $f * \overline{f}(-.)$ est aussi bornée (composée de deux fonctions de carré intégrable) et comme sa transformée de Fourier est à valeurs positives (elle vaut $|\mathcal{F}^{\pm} f|^2$ vu le calcul précédent), on a l'intégrabilité de cette transformée. Il s'ensuit donc que $\mathcal{F}^{\pm} f$ est de carré intégrable.

(2) Comme dans le cas (1), on a

$$\mathcal{F}_y^{\pm} f \times \overline{\mathcal{F}_y^{\pm} g} \; = \; \mathcal{F}_y^{\pm} \left(f * \overline{g}(-.) \right)$$

donc

$$< \mathcal{F}^{\pm} f, \mathcal{F}^{\pm} g > = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_y^{\pm} \left(f * \overline{g}(-.) \right) \, dy \; = \; \mathcal{F}_0 \mathcal{F}^{\pm} \left(f * \overline{g}(-.) \right).$$

Comme la fonction $f * \overline{g}(-.)$ est continue (produit de composition de deux fonctions de carré intégrable), l'égalité dans le théorème de Fourier est une égalité partout ; ainsi on obtient

$$\begin{aligned} < \mathcal{F}^{\pm} f, \mathcal{F}^{\pm} g > &= \mathcal{F}_0 \mathcal{F}^{\pm} \left(f * \overline{g}(-.) \right) \\ &= (2\pi)^n \left(f * \overline{g}(-.) \right)(0) \\ &= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, \overline{g}(x) \, dx \\ &= (2\pi)^n < f, g > . \end{aligned}$$

□

Chapitre 6

Transformation de Fourier dans L^2

Voir aussi le cours enseigné et les notes de J. Schmets (chapitre 8)

6.1 Définition

La définition de la transformation de Fourier pour les fonctions de carré intégrable utilise la transformation de Fourier des fonctions intégrables et est telle que si la fonction est à la fois intégrable et de carré intégrable, les transformations de Fourier soient les mêmes.

Cela étant, rappelons tout d'abord deux résultats vus précédemment, essentiels pour la suite ici.

Propriété(s) 6.1.1. *(1) Si f, g sont intégrables et de carré intégrable alors $\mathcal{F}^{\pm} f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}^{\pm} g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et on a*

$$< \mathcal{F}^{\pm} f, \mathcal{F}^{\pm} g > = (2\pi)^n < f, g > .$$

En particulier

$$\left\|\mathcal{F}^{\pm} f\right\|_2^2 = (2\pi)^n \left\|f\right\|_2^2 \quad \forall f \in L^1 \cap L^2.$$

(2) (Cas particulier du théorème d'approximation cas régulier) Pour toute fonction de carré intégrable f et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact telle que

$$\|f - \varphi\|_2 \leq \varepsilon.$$

Preuve. Voir précédemment. □

Propriété(s) 6.1.2. *Soit $f$une fonction de carré intégrable et soit f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ une suite de fonctions intégrables et de carré intégrable qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors la suite $\mathcal{F}^{\pm} f_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et la limite ne dépend pas de la suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Tout est direct et naturel. De fait, si f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ est une suite de fonctions intégrables et de carré intégrable qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, alors la suite $\mathcal{F}^{\pm} f_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ est une suite de fonctions de carré intégrable qui converge dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ car le critère de Cauchy s'applique étant donné qu'on a

$$\left\|\mathcal{F}^{\pm} f_p - \mathcal{F}^{\pm} f_q\right\|^2 = (2\pi)^n \left\|f_p - f_q\right\|^2$$

quels que soient les naturels p, q.

Soit maintenant des suites f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) et g_m ($m \in \mathbb{N}_0$) de fonctions intégrables et de carré intégrable qui convergent vers f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$; on note respectivement F, G leur limite dans $L^2(\mathbb{R})$. La suite h_m ($m \in \mathbb{N}_0$) définie par $h_{2m} = f_m$ et $h_{2m+1} = g_m$ quel que soit m est alors encore une suite de fonctions intégrables et de carré intégrable qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$; on note H sa limite. Comme les suites f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) et g_m ($m \in \mathbb{N}_0$) sont des sous-suites de la suite h_m ($m \in \mathbb{N}_0$), on obtient

$$F \ = \ H \quad et \quad G \ = \ H$$

et on conclut. □

Définition 6.1.3. *Soit f une fonction de carré intégrable. La transformée de Fourier de cette fonction est la limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de toute suite $\mathcal{F}^{\pm} f_m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) où f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est une suite de fonctions intégrables et de carré intégrable qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Cette limite est notée*

$$\mathbb{F}^{\pm} f.$$

Remarque 6.1.4. *Si f est intégrable et de carré intégrable, alors*

$$\mathcal{F}^{\pm} f \ = \ \mathbb{F}^{\pm} f$$

car la fonction $\mathbb{F}^{\pm} f$ peut être définie à partir de la suite $f_m = f$ ($m \in \mathbb{N}_0$).

6.2 Cas $n = 1$ et exemple

Propriété(s) 6.2.1 (Cas pratique pour $n = 1$)**.** *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors la suite $f_m = f\chi_{[-m,m]}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) est une suite de fonctions intégrables et de carré intégrable qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$ donc*

$$\mathbb{F}_y^{\pm} f \ = \ \lim_{m \to +\infty} \int_{-m}^{m} e^{\pm ixy} f(x) \ dx$$

dans $L^2(\mathbb{R})$.

Il s'ensuit que si la suite[1] *$\int_{-m}^{m} e^{\pm ixy} f(x) \ dx$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge presque partout vers une fonction $G^{\pm}$, alors $G^{\pm} = \mathbb{F}^{\pm} f$ presque partout.*

Preuve. Pour tout m, la fonction f_m est effectivement intégrable comme produit de deux fonctions de carré intégrable et aussi de carré intégrable car de module majoré par une fonction qui l'est.

On a également la convergence dans L^2. De fait, pour tout m on a

$$\int_{\mathbb{R}} |f_m(x) - f(x)|^2 \ dx \ = \ \int_{-\infty}^{-m} |f|^2 \ dx \ + \ \int_{m}^{+\infty} |f|^2 \ dx$$

donc

$$\lim_{m \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_m(x) - f(x)|^2 \ dx \ = \ \lim_{m \to +\infty} \int_{-\infty}^{-m} |f|^2 \ dx \ + \ \lim_{m \to +\infty} \int_{m}^{+\infty} |f|^2 \ dx \ = \ 0$$

puisque $|f|^2$ est intégrable.

Comme la suite $\mathcal{F}^{\pm} f_m = \int_{-m}^{m} e^{\pm ix \cdot} f(x) \ dx$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge dans L^2 vers $\mathbb{F}^{\pm} f$, une sous-suite converge aussi ponctuellement vers $\mathbb{F}^{\pm} f$. On obtient donc $G^{\pm} = \mathbb{F}^{\pm} f$. □

1. penser aux intégrales fléchées !

Exemple(s) 6.2.2. *Pour la fonction f définie par*

$$f(x) \;=\; \frac{\sin(x)}{x}$$

(qui est de carré intégrable mais n'est pas intégrable), on a

$$\mathbb{F}^{\pm} f \;=\; \pi\, \chi_{[-1,1]}.$$

Preuve. C'est direct en utilisant la suite $f_m = f\chi_{[-m,m]}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) pour définir $\mathbb{F}^{\pm} f$ et la valeur de l'intégrale fléchée

$$\int_0^{\to +\infty} \frac{\sin(rx)}{x}\, dx \;=\; \frac{\pi}{2} \quad \forall r > 0.$$

On a en effet successivement

$$\begin{aligned}
\int_{-m}^{m} e^{\pm ixy}\, \frac{\sin(x)}{x}\, dx \;&=\; 2\int_0^m \cos(xy)\, \frac{\sin(x)}{x}\, dx \\
&=\; \int_0^m \frac{\sin(x+xy)+\sin(x-xy)}{x}\, dx \\
&=\; \int_0^m \frac{\sin(x(1+y))}{x}\, dx \;+\; \int_0^m \frac{\sin(x(1-y))}{x}\, dx
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^{\to +\infty} \frac{\sin(x(1+y))}{x}\, dx \;&=\; \begin{cases} \frac{\pi}{2} & si\ y > -1 \\ -\frac{\pi}{2} & si\ y < -1 \end{cases} \\
\int_0^{\to +\infty} \frac{\sin(x(1-y))}{x}\, dx \;&=\; \begin{cases} \frac{\pi}{2} & si\ y < 1 \\ -\frac{\pi}{2} & si\ y > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dès lors, sauf en -1 et 1 pour la dernière égalité, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}^{\pm}_y f \;&=\; \lim_{m\to+\infty} \int_{-m}^{m} e^{\pm ixy}\, \frac{\sin(x)}{x}\, dx \\
&=\; \int_0^{\to +\infty} \frac{\sin(x(1+y))}{x}\, dx + \int_0^{\to +\infty} \frac{\sin(x(1-y))}{x}\, dx \\
&=\; \pi\, \chi_{[-1,1]}(y).
\end{aligned}$$

□

6.3 Propriétés de base

Théorème 6.3.1 (Théorème de Fourier)**.** *Pour toute fonction f de carré intégrable, on a*

$$\mathbb{F}^{\pm}\mathbb{F}^{\mp} f \;=\; (2\pi)^n\, f.$$

Preuve. Soit f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) une suite de fonctions intégrables et de carré intégrable qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. On a donc

$$\mathbb{F}^{\pm} f \;=\; \lim_{m\to+\infty} \mathcal{F}^{\pm} f_m$$

dans $L^2(\mathbb{R})$. La suite $\mathcal{F}^{\pm} f_m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) est une suite de fonctions de carré intégrable ; dès lors, si les $\mathcal{F}^{\pm} f_m$ étaient également intégrables, on pourrait se servir de cette suite pour définir la transformée de Fourier de $\mathbb{F}^{\pm}$. Et pour avoir cela, il suffit de prendre $f_m \in C_\infty(\mathbb{R})$ à support compact (et c'est possible vu le théorème d'approximation rappelé ci-dessus). On obtient donc

$$\mathbb{F}^{\mp}\mathbb{F}^{\pm} f \; = \; \lim_{m\to+\infty} \mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} f_m \; = \; (2\pi)^n \lim_{m\to+\infty} f_m \; = \; (2\pi)^m \, f.$$

□

Propriété(s) 6.3.2. *(1) L'opérateur*

$$\mathbb{F}^{\pm} \; L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \quad f \mapsto \mathbb{F}^{\pm} f$$

est linéaire, bijectif.

(2) Quels que soient les fonctions $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$< \mathbb{F}^{\pm} f, \mathbb{F}^{\pm} g > = \; (2\pi)^n \; < f, g > .$$

En particulier,

$$\left\| \mathbb{F}^{\pm} f \right\| \; = \; (2\pi)^{(n/2)} \; \| f \| \, ,$$

ce qui implique que cette transformation de Fourier est un isomorphisme[2].

Preuve. (1) Vu la définition de la transformée de Fourier d'une fonction de carré intégrable, il est clair que l'opérateur est bien à valeurs dans $L^2(\mathbb{R})$.

La linéarité s'obtient aussi directement en repassant à la définition. De fait, soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{C}$. Si f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ et g_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ sont des suites de fonctions de $L^1 \cap L^2$ qui convergent dans L^2 respectivement vers f et g, alors les suites $f_m + g_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ et cf_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ sont des suites de fonctions de $L^1 \cap L^2$ qui convergent dans L^2 respectivement vers $f + g$ et cf. Vu l'indépendance de la suite choisie pour définir la transformation de Fourier dans L^2, on a donc

$$\mathbb{F}^{\pm}(f+g) \; = \; \lim_{m\to+\infty} \mathcal{F}^{\pm}(f_m + g_m) \quad \text{et} \quad \mathbb{F}^{\pm}(cf) \; = \; \lim_{m\to+\infty} \mathcal{F}^{\pm}(cf_m).$$

La linéarité de la transformation de Fourier des fonctions intégrables donne alors le résultat :

$$\mathbb{F}^{\pm}(f+g) \; = \; \lim_{m\to+\infty} \mathcal{F}^{\pm}(f_m + g_m) \; = \; \lim_{m\to+\infty} (\mathcal{F}^{\pm} f_m + \mathcal{F}^{\pm} g_m) \; = \; \mathbb{F}^{\pm} f + \mathbb{F}^{\pm} g$$

et

$$\mathbb{F}^{\pm}(cf) \; = \; \lim_{m\to+\infty} \mathcal{F}^{\pm}(cf_m) \; = \; c \lim_{m\to+\infty} \mathcal{F}^{\pm} f_m \; = \; c\,\mathbb{F}^{\pm} f.$$

L'opérateur est aussi clairement injectif et surjectif en vertu du théorème de Fourier : d'une part si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est telle que $\mathbb{F}^{\pm} f = 0$, alors $0 = \mathbb{F}^{\mp}\mathbb{F}^{\pm} f = (2\pi)^n \, f$ donc $f = 0$; d'autre part, si $g \in L^2(\mathbb{R})$, alors $f = (2\pi)^{-n} \, \mathbb{F}^{\mp} g$ donne $\mathbb{F}^{\pm} f = (2\pi)^{-n} \, \mathbb{F}^{\pm}\mathbb{F}^{\mp} g = g$.

(2) Soient f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ et g_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ des suites de fonctions de $L^1 \cap L^2$ qui convergent dans L^2 respectivement vers f et g. Cela étant, puisque les fonctions f_m et g_m sont à la fois intégrables et de carré intégrable, on sait que

$$< \mathcal{F}^{\pm} f_m, \mathcal{F}^{\pm} g_m > = \; (2\pi)^n \; < f_m, g_m > .$$

La convergence dans L^2 des suites $\mathcal{F}^{\pm} f_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$, $\mathcal{F}^{\pm} g_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$, f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$, g_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ vers $\mathbb{F}^{\pm} f$, $\mathbb{F}^{\pm} g$, f, g respectivement donne alors

$$< \mathbb{F}^{\pm} f, \mathbb{F}^{\pm} g > = \lim_{m\to+\infty} < \mathcal{F}^{\pm} f_m, \mathcal{F}^{\pm} g_m > = \; (2\pi)^n \lim_{m\to+\infty} < f_m, g_m > = \; (2\pi)^n \; < f, g > .$$

□

2. au sens topologique du terme, à savoir continu et d'inverse continu

Chapitre 7

Suites orthonormées dans un espace de Hilbert

7.1 Définitions et propriétés de base des suites orthonormées

Voir aussi le cours enseigné et les notes de J. Schmets (chapitre 10, sections 1,2,3)

On se place dans un espace de Hilbert H, on note $< .,. >$ le produit scalaire et $\|.\|$la norme associée. Si e, f sont deux éléments de H, on dit qu'ils sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

Cela étant, on généralise les résultats liés à Pythagore et aux projections orthogonales dans un espace de dimension finie comme suit.

Propriété(s) 7.1.1 (Pythagore généralisé)**.** *Si des éléments $f_1, \ldots, f_M$ de H sont orthogonaux deux à deux alors*

$$\left\| \sum_{m=1}^{M} f_m \right\|^2 = \sum_{m=1}^{M} \|f_m\|^2.$$

On en déduit que si f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ sont des éléments de H orthogonaux deux à deux alors la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} f_m$$

converge dans H si et seulement si la série numérique

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \|f_m\|^2$$

converge, auquel cas on a

$$\left\| \sum_{m=1}^{+\infty} f_m \right\|^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \|f_m\|^2.$$

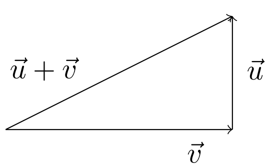
Preuve. Par définition de la norme à partir du produit scalaire et en utilisant l'hypothèse, on a directement

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{m=1}^{M} f_m\right\|^2 &= <\sum_{m=1}^{M} f_m, \sum_{j=1}^{M} f_j> \\
&= \sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} < f_m, f_j > \\
&= \sum_{m=1}^{M} < f_m, f_m > \\
&= \sum_{m=1}^{M} \|f_m\|^2.
\end{aligned}$$

Prenons maintenant une suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ dont les éléments sont orthogonaux deux à deux. Comme H est un espace de Hilbert, la série dont il est question est convergente si et seulement si elle est de Cauchy, de même que pour la série numérique. Cela étant, vu ce qui précède, pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$, $p < q$, on a

$$\left\|\sum_{m=p}^{q} f_m\right\|^2 = \sum_{m=p}^{q} \|f_m\|^2$$

et on conclut directement. □



$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

Théorème 7.1.2 (Projection orthogonale généralisée)**.** *Soit f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ une suite d'éléments de H, orthogonaux deux à deux et normés. Alors pour tout $f \in H$, il existe des coefficients uniques c_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ et $g_f \in H$ uniques tels que*

$$f = \sum_{m=1}^{+\infty} c_m f_m + g_f \quad \textit{dans } H \quad \textit{et} \quad < g, f_m >= 0 \ \forall m;$$

on a même

$$c_m =< f, f_m > \quad \forall m.$$

Il s'ensuit que, pour tous $f, h \in H$, on a

$$< f, h > = \sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m > \overline{< h, f_m >} + < g_f, g_h >$$

et en particulier

$$\|f\|^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} | < f, f_m > |^2 + \|g_f\|^2.$$

Preuve. Rappelons que la convergence dans H de la série $\sum_{m=1}^{+\infty} c_m f_m$ est équivalente à la convergence dans $\mathbb{R}$ de la série $\sum_{m=1}^{+\infty} |c_m|^2$.

Cela étant, prouvons l'unicité. Supposons que, dans H, on ait

$$f \ = \ \sum_{m=1}^{+\infty} c_m f_m \ + \ g_f \ = \ \sum_{m=1}^{+\infty} c'_m f_m \ + \ g'_f$$

avec g_f et g'_f orthogonaux à chacun des f_k. Quel que soit j, on a alors

$$< f, f_j > = \ \sum_{m=1}^{+\infty} c_m < f_m, f_j > \ + \ < g_f, f_j >= \ \sum_{m=1}^{+\infty} c'_m < f_m, f_j > \ + \ < g'_f, f_j > = \ c_j \ = \ c'_j$$

donc aussi

$$g_f \ = \ f - \sum_{m=1}^{+\infty} c_m f_m \ = \ f - \sum_{m=1}^{+\infty} c'_m f_m \ = \ g'_f.$$

Montrons alors que la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m > \ f_m$$

converge et que

$$g \ = \ f - \sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m > \ f_m$$

est orthogonal à chacun des f_k.
Pour tout M, posons

$$S_M \ = \ \sum_{m=1}^{M} < f, f_m > \ f_m.$$

Quels que soient $M, k \in \mathbb{N}_0$ avec $k \leq M$, on a

$$< f - S_M, f_k > = < f, f_k > - \sum_{m=1}^{M} < f, f_m >< f_m, f_k > = < f, f_k > - < f, f_k > = \ 0$$

donc, par Pythagore

$$\|f\|^2 \ = \ \|f - S_M + S_M\|^2 \ = \ \|f - S_M\|^2 + \sum_{m=1}^{M} | < f, f_m > |^2$$

puisque les éléments $f - S_M, \ f_1, \ldots, f_M$ sont orthogonaux deux à deux. Il s'ensuit que

$$\sum_{m=1}^{M} | < f, f_m > |^2 \ \leq \ \|f\|^2 \quad \forall M$$

donc la série $\sum_{m=1}^{+\infty} | < f, f_m > |^2$ est convergente, ce qui est équivalent à la convergence de la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m > \ f_m.$$

Pour conclure, il reste donc à prouver que

$$g \;=\; f - \sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m > \; f_m \;=\; f - \lim_{M \to +\infty} S_M$$

est orthogonal à chacun des f_k. C'est direct car, quel que soit $M \in \mathbb{N}_0$ avec $k \leq M$, on a

$$< f - S_M, f_k > = \; 0$$

donc

$$< g, f_k > = \; 0$$

par passage à la limite sur M puisqu'on a la convergence dans H de la série.

Terminons alors la preuve. Vu ce qui précède, pour tous $f, h \in H$ on a

$$f = \sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m > \; f_m \; + \; g_f \quad \text{et} \quad h = \sum_{m=1}^{+\infty} < h, f_m > \; f_m \; + \; g_h$$

dans H avec $< g_f, f_m >= 0 =< g_h, f_m >$ pour tout m ; ainsi on obtient

$$\begin{aligned}
< f, h > \;&=\; < \sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m > \; f_m \; + \; g_f, \sum_{k=1}^{+\infty} < h, f_k > \; f_k \; + \; g_h > \\
&= \; \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} < f, f_m > \overline{< h, f_k >} < f_m, f_k > \; + \; \sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m >< f_m, g_h > \\
&\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{< h, f_k >} < g_f, f_k > \; + \; < g_f, g_h > \\
&= \; \sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m > \overline{< h, f_m >} + \; < g_f, g_h > .
\end{aligned}$$

□

Théorème 7.1.3 (Base ou suite orthonormée totale)**.** *Soit* f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ *une suite d'éléments de* H*, orthogonaux deux à deux, normés et telle que*

$$h \in H, \; < h, f_m >= 0 \quad \forall m \quad \Rightarrow \quad h = 0$$

(on dit que la suite est totale). Alors pour tout $f \in H$*, on a*

$$f \;=\; \sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m > \; f_m \qquad \textit{dans} \;\; H.$$

Il s'ensuit que, pour tous $f, h \in H$*, on a*

$$< f, h > = \sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m > \overline{< h, f_m >}$$

et en particulier

$$\|f\|^2 \;=\; \sum_{m=1}^{+\infty} | < f, f_m > |^2.$$

Preuve. Cela résulte directement du théorème 7.1.2.□

7.2 Cas des séries trigonométriques de Fourier

7.2.1 Résultat fondamental

Voir aussi le cours enseigné et les notes de J. Schmets (chapitre 10)

Théorème 7.2.1. *Soient des réels a, b tels que $a < b$. Alors les fonctions définies explicitement par*

$$e_m(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{2im\pi x/(b-a)}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

forment une suite orthonormée totale de $L^2([a,b])$ (c'est-à-dire une base orthonormée de cet espace).

Preuve. Le fait que ces fonctions soient normées est évident. Le fait qu'elles soient orthogonales est immédiat au vu de leur périodicité : si $m \neq k$ alors

$$\begin{aligned}
< e^{2im\pi./(b-a)}, e^{2ik\pi./(b-a)} > &= \int_a^b e^{2i(m-k)\pi x/(b-a)}\, dx \\
&= \frac{b-a}{2i(m-k)\pi} \int_a^b De^{2i(m-k)\pi x/(b-a)}\, dx \\
&= \frac{b-a}{2i(m-k)\pi} \left(e^{2i(m-k)\pi b/(b-a)} - e^{2i(m-k)\pi a/(b-a)}\right) \\
&= \frac{b-a}{2i(m-k)\pi} \left(e^{2i(m-k)\pi(b-a+a)/(b-a)} - e^{2i(m-k)\pi a/(b-a)}\right) \\
&= \frac{b-a}{2i(m-k)\pi} \left(e^{2i(m-k)\pi a/(b-a)} - e^{2i(m-k)\pi a/(b-a)}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pour prouver la totalité, c'est moins direct. Nous allons établir un résultat auxiliaire qui, lui, permet de conclure directement. □

Avant cela présentons un exemple.

7.2.2 Exemple

On a

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(mx)}{m}$$

dans $L^2([0, 2\pi])$ et on en déduit que

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

COMPLETER (calcul)

7.2.3 Retour à la totalité

Si $f \in L^2([a,b])$, pour tout naturel non nul M, nous notons $S_M(f,.)$ la somme partielle

$$S_M(f,.) \ = \ \sum_{m=-M}^{M} < f, e_m > \ e_m(.)$$

Définition 7.2.2. *Pour alléger les notations, considérons le cas $a=0$ et $b=2\pi$.*
Pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, posons (D_M est appelé noyau de Dirichlet de degré M)

$$D_M(t) = \begin{cases} 2M+1 & \text{si } t \text{ est un multiple entier de } 2\pi \\ \dfrac{\sin\left((2M+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriété(s) 7.2.3. *Pour alléger les notations, considérons le cas $a=0$ et $b=2\pi$.*
(1) Pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, D_M est pair, 2π- périodique et on a

$$D_M(t) = \sum_{m=-M}^{M} e^{imt}, \qquad \int_0^{2\pi} D_M(t+r)\ dt \ = \ 2\pi, \ \forall r \in \mathbb{R}.$$

(2) Pour toute fonction f appartenant à $L^2([0,2\pi])$ et pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, on a

$$S_M(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_M(x-y)f(y)\ dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si f est défini sur $\mathbb{R}$ et est 2π-périodique, on a

$$S_M(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_M(y)f(x-y)\ dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_M(x-y)f(y)\ dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(3) Pour toute fonction f de classe C_2 sur $\mathbb{R}$ et à support compact dans $]0,2\pi[$, la suite $S_M(f,.)$, $(M \in \mathbb{N}_0)$ converge uniformément sur $[0,2\pi]$ vers f.

Preuve. (1) L'expression de D_M résulte d'une sommation de termes consécutifs d'une progression géométrique.

Pour l'intégrale, on utilise le fait que D_M est périodique de période 2π :

$$\int_0^{2\pi} D_M(t+r)\ dt \ = \ \int_r^{2\pi+r} D_M(x)\ dx \ = \ \int_0^{2\pi} D_M(x)\ dx.$$

(2) On a successivement

$$\begin{aligned} S_M(f,x) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-M}^{M}\left(\int_0^{2\pi} f(y)e^{-imy}dy\right)\ e^{imx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{m=-M}^{M} e^{im(x-y)}\ f(y)\ dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_M(x-y)\ f(y)\ dy \end{aligned}$$

et, si f est 2π-périodique, un changement de variable linéaire conduit au résultat.

(3) Soit f^P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodisation de f considérée sur $[0, 2\pi[$. Cela signifie que $f^P(x) = f(x)$ pour $x \in [0, 2\pi[$ et $f^P(x) = f(x - 2k\pi)$ si $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi[$ avec k entier non nul. Notons bien que comme le support de f est un compact de $]0, 2\pi[$, on a $f(x) = 0$ pour $x \in [0, 2\pi]$, voisin de 0 et de 2π. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $f^P(x) = 0$ pour tout x voisin de $2k\pi$. Dès lors la fonction f^P appartient aussi à $C_2(\mathbb{R})$. Et on a également $S_M(f) = S_M(f^P)$ quel que soit le naturel M.

Pour ne pas alourdir les notations, dans ce qui suit on utilise la notation f au lieu de f^P.

Montrons tout d'abord la convergence ponctuelle vers f.

Soit $x \in [0, 2\pi]$. Comme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(y) f(x) dy$$

pour tout M, on obtient

$$\begin{aligned} S_M(f, x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(y) \big(f(x-y) - f(x)\big)\, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin\Big((2M+1)\frac{y}{2}\Big) \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin(y/2)} dy. \end{aligned}$$

Le théorème de Riemann-Lebesgue donne alors

$$\lim_{M \to +\infty} \left(S_M(f, x) - f(x)\right) = \lim_{M \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin\Big((2M+1)\frac{y}{2}\Big) \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin(y/2)} dy = 0$$

pour autant que l'on montre que la fonction

$$y \mapsto \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin(y/2)}$$

est intégrable sur $]0, 2\pi[$. De fait, cette fonction est continue sur l'intervalle $]0, 2\pi[$ et même sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Examinons son intégrabilité en 0^+ et en $(2\pi)^-$. L' intégrabilité en 0^+ est directement acquise car la limite de cette fonction en 0 est finie :

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin(y/2)} = \lim_{y \to 0} \left(\frac{f(x-y) - f(x)}{y} \frac{y}{\sin(y/2)} \right) = -2Df(x) \in \mathbb{C}.$$

Examinons ensuite l'intégrabilité en $(2\pi)^-$. On a de même (f est 2π-périodique)

$$\begin{aligned} \lim_{y \to 2\pi} \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin(y/2)} &= \lim_{y \to 2\pi} \frac{f(x - (y - 2\pi)) - f(x)}{\sin(y/2)} \\ &= -\lim_{y \to 2\pi} \frac{f(x - (y - 2\pi)) - f(x)}{\sin((y - 2\pi)/2)} \\ &= -\lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{\sin(h/2)} \\ &= -\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x-h) - f(x)}{h} \frac{h}{\sin(h/2)} \right) \\ &= 2Df(x) \end{aligned}$$

Montrons alors que la convergence est uniforme. Pour cela, on utilise le critère de Cauchy. Pour tout m différent de 0, vu la régularité de f et son support, on a successivement

$$\begin{aligned}
< f, e_m > &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-imt}\, dt \;=\; -\frac{1}{im\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)\, De^{-imt}\, dt \\
&= \frac{1}{im\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} Df(t)\, e^{-imt}\, dt \\
&= -\frac{1}{(im)^2\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} Df(t)\, De^{-imt}\, dt \\
&= \frac{1}{m^2\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} D^2 f(t)\, e^{-imt}\, dt \\
&= \frac{1}{m^2} < D^2 f, e_m > .
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tous naturels p, q avec $p < q$, on a

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,2\pi]} |S_p(f,x) - S_q(f,x)| &= \sup_{x\in[0,2\pi]} \left| \sum_{m=p+1}^{q} < f, e_m > e_m(x) \;+\; \sum_{m=-q}^{-p-1} < f, e_m > e_m(x) \right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=p+1}^{q} |< f, e_m >| \;+\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-q}^{-p-1} |< f, e_m >| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=p+1}^{q} \frac{1}{m^2} \left|< D^2 f, e_m >\right| \;+\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-q}^{-p-1} \frac{1}{m^2} \left|< D^2 f, e_m >\right|
\end{aligned}$$

Comme on a

$$\begin{aligned}
\left|< D^2 f, e_m >\right| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_0^{2\pi} D^2 f(t)\, e^{-imt}\, dt \right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{t\in[0,2\pi]} |D^2 f(t)| \;\; 2\pi \\
&= \sqrt{2\pi} \sup_{t\in[0,2\pi]} |D^2 f(t)|
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[0,2\pi]} |S_p(f,x) - S_q(f,x)| \\
&\leq \sum_{m=p+1}^{q} \frac{1}{m^2} \sup_{t\in[0,2\pi]} |D^2 f(t)| \;+\; \sum_{m=-q}^{-p-1} \frac{1}{m^2} \sup_{t\in[0,2\pi]} |D^2 f(t)| \\
&= 2 \sup_{t\in[0,2\pi]} |D^2 f(t)| \sum_{m=p+1}^{q} \frac{1}{m^2}.
\end{aligned}$$

Et on peut conclure étant donné la convergence de la série de terme général $1/m^2$. □

Nous pouvons alors revenir à la preuve de la totalité.

Totalité *Les fonctions* e_m $(m \in \mathbb{Z})$ *forment une suite orthonormée totale dans* $L^2([a,b])$.

Preuve Comme précédemment, pour alléger les notations, prenons $a = 0, b = 2\pi$.

Soit donc $f \in L^2([0,2\pi])$ tel que $< f, e_m >= 0$ quel que soit l'entier m. On doit montrer que $f = 0$. Vu le théorème d'approximation (cas régulier), on sait qu'il existe une suite de fonctions φ_m ($m \in \mathbb{N}$) de fonctions de $C_\infty(\mathbb{R})$ à support dans $]0, 2\pi[$ telle que

$$\lim_{m\to+\infty} \varphi_m \ = \ f \quad \text{dans } L^2[0,2\pi]).$$

Cela étant, vu les propriétés 7.2.3 on a

$$\lim_{M\to+\infty} S_M(\varphi_m, .) \ = \ \varphi_m(.)$$

pour tout m, la convergence étant une convergence uniforme sur $[0, 2\pi]$. Il s'ensuit que

$$< f, \varphi_m > = \lim_{M\to+\infty} < f, S_M(\varphi_m) >$$

pour tout m (vu la convergence uniforme et aussi dans L^2). Mais vu l'hypothèse, puisque $S_M(\varphi_m)$ est une combinaison linéaire de e_k, la linéarité du produit scalaire donne $< f, S_M(\varphi_m) >= 0$ quels que soient m, M donc

$$< f, \varphi_m > = \ 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

On conclut alors directement car

$$\|f\|^2 \ = < f, f > = \lim_{m\to+\infty} < f, \varphi_m > = \ 0.$$

$\square$

Théorème 7.2.4. *Soient des réels a, b avec $a < b$. Alors les fonctions définies explicitement par*

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{b-a}}, \quad u_m(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos\left(\frac{2m\pi x}{b-a}\right) \quad \textit{et} \quad v_m(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\left(\frac{2m\pi x}{b-a}\right) \ (m \in \mathbb{N}_0)$$

forment une suite orthonormée totale de $L^2([a,b])$ (c'est-à-dire une base orthonormée de cet espace).

Preuve. Le fait que les fonctions soient orthonormées résulte de calculs directs d'intégrales : on peut faire les calculs avec les fonctions sinus et cosinus ou même se ramener aux exponentielles en utilisant les liens qui les unissent.

Quant à la totalité elle s'obtient aussi directement. De fait, si on utilise l'expression des e_k en fonctions des u_k et v_k, on a, pour tout naturel strictement positif m, (avec $f \in L^2([a,b])$)

$$< f, e_m > = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(< f, u_m > -i < f, v_m >\right) \quad \text{et} \quad < f, e_{-m} > = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(< f, u_m > +i < f, v_m >\right)$$

donc si $< f, u_m >= 0$ pour tout naturel m et $< f, v_m >= 0$ pour tout naturel strictement positif m, on a $< f, e_m >= 0$ pour tout entier m donc $f = 0$ vu la totalité des fonctions e_m ($m \in \mathbb{Z}$). $\square$

7.2.4 Le phénomène de Gibbs

Ce que la théorie nous dit, c'est que la convergence des séries trigonométriques est une convergence de type L^2. La théorie de la convergence dans L^2 permet alors de dire qu'une sous-suite de la suite des sommes partielles converge presque partout vers la fonction développée. Mais on a plus : *le théorème de Carleson affirme que la suite des sommes partielles elle-même converge presque partout.* [1]

Ce n'est que sous des conditions supplémentaires que l'on a la convergence ponctuelle de la suite des sommes partielles, même si f est continu (COMPLETER : retrouver une référence)

Le phénomène de Gibbs décrit ci-dessous illustre le comportement de la suite des sommes partielles au niveau d'un point de discontinuité [2] de f. Les sommes partielles $S_M(f,.)$ du développement en série trigonométrique de Fourier subissent une forte oscillation, une sorte de « sursaut ». Les images laissent soupçonner et le calcul montre effectivement que l'amplitude de ce sursaut tend vers une constante. Précisément, si la fonction a une discontinuité d'amplitude Δ, alors le « saut » en ordonnée des sommes partielles est de l'ordre de 17% de plus que Δ.

<u>Enoncé</u> relatif au phénomène de Gibbs.

Soit f une fonction périodique et localement dans L^2, dont les coefficients de Fourier c_m ($m \in \mathbb{Z}$) sont tels que l'ensemble $\{m|c_m \ : \ m \in \mathbb{Z}\}$ soit borné et qui possède un nombre fini de points de discontinuité, en chacun desquels elle admet une limite finie à gauche et à droite. Alors, pour chacune de ces discontinuités x_0 de ce type, il existe $x_M \to x_0+$ et $y_M \to x_0-$ tels que

$$\lim_{M\to+\infty} |S_M(f,x_M) - S_M(f,y_M)| = G\Delta$$

où G est la constante de Gibbs

$$G = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \ (> 1.17)$$

et où

$$\Delta = |f(x_0+) - f(x_0-)| \, .$$

Voici une illustration, mais via internet vous en trouvez beaucoup d'autres ! (Remarque : ne pas oublier de considérer la fonction périodisée ; ici, il faut répéter le graphique de f (à savoir $f(x) = x, \ x \in [0, \pi]$) de façon périodique pour mieux visualiser)

1. La preuve date de 1966. Lennart Axel Edvard Carleson est un mathématicien suédois né le 18 mars 1928 à Stockholm
2. d'un certain type

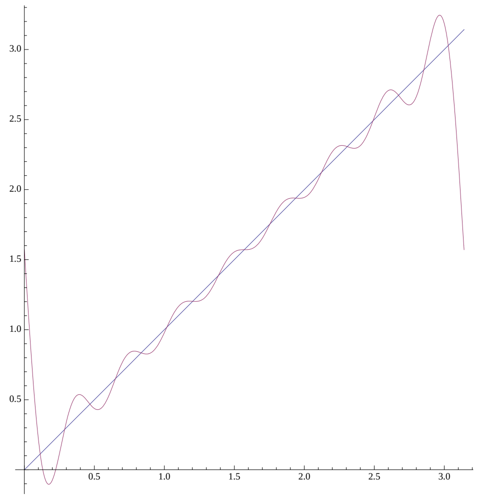


Illustration sur le cas de $f(x) = x$.

Soit le développement de $f : x \mapsto x$ en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([0, \pi])$, à savoir [3]

$$x = \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(2mx)}{m}.$$

On pose

$$S_M(f, x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{M} \frac{\sin(2mx)}{m}, \quad M \in \mathbb{N}_0.$$

On sait que

$$\lim_{M \to +\infty} \int_0^\pi |S_M(f, x) - x|^2 \, dx = 0 \quad \text{(convergence dans } L^2([0, \pi]))$$

Le phénomène de Gibbs décrit le comportement des sommes partielles $S_M(f, .)$ au voisinage des points de discontinuité (de la fonction f périodisée). Ici, les points considérés sont donc les multiples entiers de π.

Ici on a directement

$$\Delta = |f(0+) - f(0-)| = \pi$$

et aussi (prouvé plus loin *)

$$\begin{aligned} \lim_{M \to +\infty} S_M\left(f, -\frac{\pi}{2M}\right) &= \frac{\pi}{2} + \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \\ \lim_{M \to +\infty} S_M\left(f, \frac{\pi}{2M}\right) &= \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx. \end{aligned}$$

Dès lors

$$\lim_{M \to +\infty} \left| S_M\left(f, \frac{\pi}{2M}\right) - S_M\left(f, -\frac{\pi}{2M}\right) \right| = 2 \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \;=\; G\Delta$$

Il reste à montrer que

$$G \;=\; \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \;>\; 1.17$$

3. L'exemple donné au cours-podcast permet d'obtenir le résultat, pas besoin ICI de refaire le calcul

De fait, du développement

$$\sin x = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

on tire

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \int_0^\pi x^{2m} dx = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \pi^{2m+1}}{(2m+1)!(2m+1)}.$$

Dès lors, quel que soit le naturel strictement positif M, on a (car[4] ...)

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx &= 2 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{(2m+1)!(2m+1)} \\
&= 2 \sum_{m=0}^{M} \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{(2m+1)!(2m+1)} + 2 \sum_{m=M+1}^{+\infty} \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{(2m+1)!(2m+1)} \\
&\geq 2 \sum_{m=0}^{M} \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{(2m+1)!(2m+1)} - 2 \frac{\pi^{2(M+1)}}{(2M+3)!\ (2M+3)}.
\end{aligned}$$

Si on note

$$RG(M) = 2 \sum_{m=0}^{M} \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{(2m+1)!(2m+1)} - 2 \frac{\pi^{2(M+1)}}{(2M+3)!\ (2M+3)},$$

on a

$$RG(0) = 0.90338, RG(1) = 0.57868, RG(2) = 1.17357, RG(3) = 1.16776$$
$$RG(4) = 1.17896, RG(5) = 1.17893, RG(6) = 1.17898, RG(7) = 1.17898$$

Démontrons que (*)

$$\begin{aligned}
\lim_{M \to +\infty} S_M\left(f, -\frac{\pi}{2M}\right) &= \frac{\pi}{2} + \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \\
\lim_{M \to +\infty} S_M\left(f, \frac{\pi}{2M}\right) &= \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx.
\end{aligned}$$

Démontrons par exemple la seconde égalité sur la limite de $S_M(f,.)$. La première s'y ramène immédiatement. On a successivement

$$\begin{aligned}
S_M\left(f, \frac{\pi}{2M}\right) &= \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{M} \frac{\sin(\pi m/M)}{m} \\
&= \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{M} \frac{\sin(\pi m/M)}{m/M} \\
&= \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{M} \frac{\pi}{M} \frac{\sin(\pi m/M)}{\pi m/M} \\
&= \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{M} \frac{\pi}{M} F(x_m) \\
&= \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{M} (x_m - x_{m-1}) F(x_m)
\end{aligned}$$

4. penser à $|a+b| \geq \big||a| - |b|\big|$ et à la majoration de la queue d'une série alternée

avec

$$F(x) = \frac{\sin x}{x}$$

et $x_m = \pi m/M,\ m = 1, \ldots, M$. Dès lors en utilisant la définition de l'intégrale (de Riemann) pour le prolongement continu sur $[0, \pi]$ de F et le découpage $x_m = \pi m/M,\ m = 1, \ldots, M$ de $[0, \pi]$ on obtient

$$\lim_{M \to +\infty} S_M \left(f, \frac{\pi}{2M} \right) = \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi F(x) dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx.$$

7.2.5 Convergence ponctuelle

Examinons maintenant un cas où l'on peut préciser la convergence ponctuelle : nous présentons ici le cas des fonctions « C_1 par morceaux ».

Propriété(s) 7.2.5 (Résultats auxiliaires)**.** *(1) Soient D_M ($M \in \mathbb{N}$) les noyaux de Dirichlet introduits précédemment. Pour rappel*

$$D_M(t) = \frac{\sin\left((2M+1)t/2\right)}{\sin\left(t/2\right)}$$

On a

$$\int_0^{2\pi} D_M(t)\ dt = 2\pi \quad et \quad \int_0^\pi D_M(t)\ dt = \int_{-\pi}^0 D_M(t)\ dt = \pi.$$

(2) Si f est une fonction définie sur un intervalle borné $]\alpha, \beta[$ et est la restriction d'une fonction F appartenant à $C_1(I)$ où I est un intervalle ouvert contenant $[\alpha, \beta]$, alors f admet une limite finie à droite en α et à gauche en β. On note ces limites respectivement

$$f(\alpha+) \quad et \quad f(\beta-)$$

Preuve. (1) La première égalité a déjà été prouvée (elle est immédiate à partir de l'expression du noyau de Dirichlet sous forme d'une somme d'exponentielles). Quant à la seconde, elle s'obtient directement en utilisant la périodicité et la parité des noyaux D_M : on a successivement

$$2\pi = \int_0^{2\pi} D_M(t)\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} D_M(t)\ dt = 2\int_0^\pi D_M(t)\ dt = 2\int_{-\pi}^0 D_M(t)\ dt$$

donc

$$\int_0^\pi D_M(t)\ dt = \int_{-\pi}^0 D_M(t)\ dt = \pi.$$

(2) Pour tous réels x, t de l'intervalle $]\alpha, \beta[$, on a (*)

$$f(t) = F(t) = F(x) + \int_x^t DF(y)\ dy = f(x) + \int_x^t DF(y)\ dy.$$

Comme DF est continu sur $[\alpha, \beta]$, elle y est intégrable donc les limites

$$\lim_{x \to \alpha+} \int_x^t DF(y)\ dy \quad \text{et} \quad \lim_{t \to \beta-} \int_x^t DF(y)\ dy$$

existe et sont finies. Les égalités (*) donnent immédiatement la conclusion. □

Avant de passer au résultat de convergence ponctuelle annoncé, définissons ce que l'on entend ici par fonction « C_1 par morceaux ».

Définition 7.2.6. *Soit f une fonction définie sur un intervalle borné $]a,b[$. On dit qu'elle est « C_1 par morceaux » s'il existe un naturel J, des réels $a_1,\ldots,a_{J-1}$ tels que $a_0=a<a_1<\ldots<a_{J-1}<b=a_J$ et des fonctions F_j $(j=1,\ldots,J)$ appartenant à $C_1(I_j)$, avec I_j intervalle ouvert contenant $[a_{j-1},a_j]$ qui vérifient $F_j=f$ sur $]a_{j-1},a_j[$ quel que soit $j=1,\ldots J$.*

On a alors le résultat suivant.

Proposition 7.2.7. *Soit f une fonction périodique de période $b-a$, de classe « C_1 par morceaux » sur $]a,b[$. Alors cette fonction est dans $L^2([a,b])$ et, en notant $S_M(f,.)$ les sommes partielles habituelles de la série trigonométrique de Fourier, on a*

$$\lim_{M\to+\infty} S_M(f,x) \;=\; \frac{f(x+)+f(x-)}{2} \quad \forall x\in]a,b[$$

et

$$\lim_{M\to+\infty} S_M(f,x) \;=\; \frac{f(a+)+f(b-)}{2} \quad \text{si } x=a \text{ ou } x=b$$

Preuve. On reprend les notations de la définition de « C_1 par morceaux ».

Les hypothèses impliquent que la fonction est dans $L^2([a,b])$. De fait, on a

$$]a,b[=\bigcup_{j=1}^{J-1}]a_{j-1},a_j]\cup]a_{J-1},a_J[;$$

sur chacun des sous-intervalles ouverts, la fonction est continue et, aux bords, elle admet une limite finie comme prouvé dans le résultat auxiliaire précédent. Ainsi, sur chaque sous-intervalle, elle est bornée ; dès lors elle l'est aussi sur $]a,b[$. Il s'ensuit qu'elle est de carré intégrable (elle est bien sûr aussi mesurable).

Cela étant, reprenons les expressions calculées dans le résultat de totalité. On simplifie aussi les notations en prenant $a=0$ et $b=2\pi$.

Pour tout $x\in]0,2\pi[$ différent des a_j, cela se passe comme dans le cas de la totalité. On a

$$f(x) \;=\; \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$$

et

$$\begin{aligned}
S_M(f,x)-f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_M(y)f(x-y)\;dy \;-\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\;dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_M(y)\,\Big(f(x-y)-f(x)\Big)\;dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_M(y)\,\Big(f(x-y)-f(x)\Big)\;dy \quad \text{(vu la périodicité)}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{(2M+1)y}{2}\right)\,\frac{f(x-y)-f(x)}{\sin(y/2)}\;dy.
\end{aligned}$$

La conclusion s'obtient alors par Riemann-Lebesgue car la fonction

$$y\mapsto\frac{y/2}{\sin(y/2)}$$

est continue sur $[-\pi,\pi]$ (prolongement continu en 0) et

$$y\mapsto\frac{f(x-y)-f(x)}{y/2}$$

est intégrable sur $]-\pi,\pi[$. De fait, sur $]0,\pi[$, elle est continue sauf en les points $x-a_j$ et en ceux-ci, elle admet une limite finie à droite et à gauche ; en π, elle admet aussi une limite finie à gauche (qui est $f(x-\pi)-f(x)$ si $x-\pi\neq a_k$ et $f(a_k-)-f(x)$ sinon). En 0, elle admet aussi une limite finie car x diffère des a_j et donc cette limite vaut $-2Df(x)$.

Prenons alors le cas où $x=a_j$ avec $j\neq 0$ et $j\neq J$. On a successivement

$$\begin{aligned}
&S_M(f,x)-\frac{f(x+)+f(x-)}{2}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_M(y)f(x-y)\,dy - \frac{f(x+)+f(x-)}{2}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_M(y)f(x-y)\,dy - \frac{f(x+)}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_M(y)f(x-y)\,dy - \frac{f(x-)}{2}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_M(y)\Big(f(x-y)-f(x+)\Big)\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_M(y)\Big(f(x-y)-f(x-)\Big)\,dy.
\end{aligned}$$

Pour conclure comme ci-dessus en utilisant le théorème de Riemann-Lebesgue, il reste à vérifier que les fonctions

$$y\mapsto \frac{f(x-y)-f(x+)}{y} \quad \textit{et} \quad y\mapsto \frac{f(x-y)-f(x-)}{y}$$

admettent des limites finies en $0-$ et $0+$ respectivement. Si y est proche de 0 et négatif (resp. positif), on a

$$f(x-y)-f(x+) = F_{j+1}(x-y)-F_{j+1}(x) \quad \Big(\text{resp.}\quad f(x-y)-f(x-) = F_j(x-y)-F_j(x)\Big)$$

et on conclut comme précédemment.

Enfin, pour $x=0$ ou $x=2\pi$: on fait comme précédemment en utilisant la périodicité. Faisons-le pour $x=0$. On a

$$\begin{aligned}
&S_M(f,0)-\frac{f(0+)+f(2\pi-)}{2}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_M(y)f(-y)\,dy - \frac{f(0+)+f(2\pi-)}{2}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_M(y)f(-y)\,dy - \frac{f(0+)}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_M(y)f(-y)\,dy - \frac{f(2\pi-)}{2}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_M(y)\Big(f(-y)-f(0+)\Big)\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_M(y)\Big(f(-y)-f(2\pi-)\Big)\,dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_M(y)\Big(f(-y)-f(0+)\Big)\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_M(y)\Big(f(2\pi-y)-f(2\pi-)\Big)\,dy
\end{aligned}$$

et on conclut comme précédemment.□

Remarque 7.2.8. *Les résultats précédents sont aussi valables si on prend les sommes partielles provenant de la décomposition dans la base formée des sinus et cosinus.*

Preuve. Notons e_m $(m\in\mathbb{Z})$ les fonctions exponentielles « imaginaire pur ». La base orthonormée formée des fonctions sinus et cosinus est la famille des fonctions

$$e_0,\quad \sqrt{2}\,\Re(e_m)=\sqrt{2}\,\Re(e_{-m})\ (m\in\mathbb{N}_0)\quad \text{et}\quad \sqrt{2}\,\Im(e_m)=-\sqrt{2}\,\Im(e_{-m})\ (m\in\mathbb{N}_0).$$

Cela étant, soit $f \in L^2([a,b])$. Pour tout naturel non nul m on a

$$\begin{aligned} &< f, e_m > e_m \\ &\quad = \; < f, \Re(e_m) > \Re(e_m) + i < f, \Re(e_m) > \Im(e_m) - i < f, \Im(e_m) > \Re(e_m) + < f, \Im(e_m) > \Im(e_m) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &< f, e_{-m} > e_{-m} \\ &\quad = \; < f, \Re(e_m) > \Re(e_m) - i < f, \Re(e_m) > \Im(e_m) + i < f, \Im(e_m) > \Re(e_m) + < f, \Im(e_m) > \Im(e_m) \end{aligned}$$

donc

$$< f, e_m > e_m + < f, e_{-m} > e_{-m} \; = \; 2 < f, \Re(e_m) > \Re(e_m) + 2 < f, \Im(e_m) > \Im(e_m).$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} S_M(f,.) &= \sum_{m=-M}^{M} < f, e_m > e_m \\ &= \; < f, e_0 > e_0(.) + 2 \sum_{m=1}^{M} \left(< f, \Re(e_m) > \Re(e_m) + < f, \Im(e_m) > \Im(e_m) \right), \end{aligned}$$

ce qui n'est rien d'autre que l'égalité des sommes partielles, quelle que soit la base choisie.□

7.3 Le théorème d'échantillonnage de Shannon

Le théorème d'échantillonnage de Shannon [5] est un résultat fondamental de la théorie du signal. Il donne également une explication pour un phénomène courant : la vision de roues qui semblent tourner à l'envers [6].

Imaginons ainsi qu'une caméra prend y clichés par seconde d'une roue qui tourne à x tours par seconde (dans le sens des aiguilles d'une montre, pour mieux visualiser) et que l'on fixe un rayon de la roue comme repère. Entre deux clichés successifs, la roue a donc tourné de x/y tour(s). Si $x < y$, entre deux clichés, la roue n'aura ainsi pas fait un tour complet : il lui manque une portion d'arc de $1 - x/y$. Si y^* est le nombre de clichés nécessaires pour voir la roue faire 1 tour complet « à l'envers », alors

$$y^* \times \left(1 - \frac{x}{y}\right) \; = \; 1$$

c'est-à-dire

$$y^* \; = \; \frac{y}{y-x}.$$

Par exemple, si on voit la roue faire 1 tour complet « à l'envers » en 1 seconde, on a pris y clichés donc $y^* = y$ et ainsi

$$y - x \; = \; 1.$$

5. Claude Elwood Shannon (né le 30 avril 1916 à Petoskey, Michigan - mort le 24 février 2001 à Medford, Massachusetts) est un ingénieur en génie électrique et mathématicien américain. Il est l'un des pères, si ce n'est le père fondateur, de la théorie de l'information. Il a publié la preuve du théorème en 1949. On associe ensuite le nom de Nyquist à ce résultat car celui-ci avait ouvert la voie dès 1928. Shannon et Nyquist ont tous les deux travaillé chez Bell Laboratories.

6. c'est un phénomène aussi appelé « repli du spectre »

La différence entre la fréquence réelle (x) et la fréquence d'échantillonnage (y) est appelée *fréquence apparente* et elle est égale à $x - y$. Ici, on a donc $x - y = -1$: la roue tourne « à l'envers » une fois par seconde.

Voir par exemple https ://www.cooperation.ch/rubriques/famille/le-savais-tu/2019/pourquoi-les-roues-tournent-a-l-envers-lorsqu-une-voiture-roule-vite–225667/

Une autre illustration consiste à ne regarder que la trotteuse sur une horloge lorsqu'on prend des clichés toutes les 59 secondes (par exemple). On obtient le tableau suivant

0	:	00
1	:	59
2	:	58
3	:	57
...	:	...

Sur le cadran, la trotteuse semble donc reculer ! Voir par exemple (seulement la trotteuse) https ://couleur-science.eu/ ?d=af1b19–photographie-le-phenomene-de-repliement-de-spectre-ou-lillusion-de-la-roue-qui-tourne-en-sens-inverse

Passons alors au résultat précis de Shannon. Il exprime qu'*un signal limité en fréquence est entièrement déterminé à partir d'un échantillonnage de ce signal correspondant à* ***deux échantillons par période***[7].

Ainsi, dans les illustrations ci-dessus, voir le phénomène de « l'envers » résulte du fait que le pas d'échantillonnage ($1/y$) est trop petit par rapport à la période de rotation de la roue ($1/x$).

Et, dans les notations du théorème ci-dessous, la période est $T = 2\pi/\nu$ et le pas d'échantillonnage est $\pi/\nu = T/2$: la fonction est évaluée deux fois par période.

Nous donnons ci-dessous une démonstration du résultat basée sur le développement en série trigonométrique de Fourier. On peut aussi l'obtenir en utilisant la théorie des distributions (ici les distributions de Dirac) ; cette preuve fait ressortir davantage les aspects de la théorie du signal mais nous ne la présentons pas ici car l'acquis mathématique n'est pas suffisant à ce stade.

Théorème 7.3.1. (Théorème d'échantillonnage de Shannon)

Soit ν un réel strictement positif. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$, appartenant à $L^2(\mathbb{R})$ et dont le support de la transformée de Fourier (négative) est inclus dans $[-\nu, \nu]$, alors, dans $L^2(\mathbb{R})$, on a

$$f(x) = \lim_{M \to +\infty} \sum_{m=-M}^{M} f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right) \frac{\sin(\nu x - m\pi)}{\nu x - m\pi}$$

Preuve. Le développement en série trigonométrique de Fourier de $\widehat{f}$ dans $L^2([-\nu, \nu])$ donne

$$\begin{aligned} \widehat{f}(y) &= \frac{1}{2\nu} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\nu}^{\nu} \widehat{f}(u) e^{im\pi u/\nu} du \right) e^{-im\pi y/\nu} \\ &= \frac{1}{2\nu} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^{+}_{\frac{m\pi}{\nu}} \widehat{f} \; e^{-im\pi y/\nu}. \end{aligned}$$

7. dans le langage de l'analyse du signal : « échantillonnage deux fois par cycle de la plus haute fréquence »

Cela étant, on a

$$\mathcal{F}^+\widehat{f} \;=\; F^+\widehat{f} \;=\; 2\pi\, f$$

presque partout mais comme f est continu, cette égalité a lieu partout et on obtient ainsi

$$\widehat{f}(y) \;=\; \frac{\pi}{\nu}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right) e^{-im\pi y/\nu},$$

la convergence ayant lieu dan $L^2([-\nu,\nu])$. Maintenant, comme $\hat{f}=\hat{f}\chi_{[-\nu,\nu]}$ on obtient alors

$$\begin{aligned} F_x^+\widehat{f} \;=\; 2\pi\, f(x) \;=\; \int_{-\nu}^{\nu} e^{iyx}\,\widehat{f}(y)\,dy \;&=\; \frac{\pi}{\nu}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right)\int_{-\nu}^{\nu} e^{iyx}\,e^{-im\pi y/\nu}\,dy \\ &=\; \frac{2\pi}{\nu}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right)\frac{\sin(\nu x-m\pi)}{x-m\pi/\nu} \\ &=\; 2\pi\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right)\frac{\sin(\nu x-m\pi)}{\nu x-m\pi} \end{aligned}$$

dans $L^2(\mathbb{R})$ et on peut conclure.□

Notons que si f a un « bon » comportement à l'infini, la convergence peut être fortement améliorée.

Remarquons aussi que ce résultat exprime qu'après normation, les fonctions

$$x \mapsto \frac{\sin(\nu x-m\pi)}{\nu x-m\pi} \quad m\in\mathbb{Z}$$

forment une base orthonormée de l'espace des fonctions de carré intégrable dont le support de la transformée de Fourier est inclus dans l'intervalle $[-\nu,\nu]$.

7.4 Autres exemples de suites orthonormées totales

Voir cours enseigné et notes de J. Schmets (chapitre 11)