Exercices supplémentaires

Analyse MATH 0247
AA 25-26

Voir aussi un **ancien syllabus d'exercices** à l'adresse

http ://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens/2007-2008/a2p1/Exercices2CSM.pdf

Ne pas oublier non plus les **corrigés** sur les pages web du cours.

Exercice 1 Déterminer la condition nécessaire et suffisante sur le paramètre réel non nul α pour que la fonction

$$f_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{1+x^{\alpha^2}} \quad x \in]0,+\infty[$$

(1.1) soit intégrable en 0
(1.2) soit intégrable en $+\infty$.

Exercice 1bis (1bis.1) La fonction $x \mapsto \mathrm{arctg} x$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$? Pourquoi ?
(1bis.2) Examiner l'intégrabilité de

$$\frac{\ln x}{1+x^\theta}$$

sur $]0,+\infty[$ pour toutes les valeurs du réel strictement positif θ.

Exercice 2 Si l'intégrale suivante a un sens, en déterminer la valeur.

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t}\,\sqrt{2-t}}\,dt$$

Exercice 2bis (2bis.1) Démontrer que, quel que soit le réel $t > 1/2$, on a

$$\Big(\Gamma(t^2)\Big)^2 \;\leq\; \Gamma(2t-1)\,\Gamma(2t+3).$$

(2bis.2) Démontrer que, quel que soit le réel $m > 1/2$, on a

$$(DB(m,m))^2 \;\leq\; 8\,B(2m-1,2m-1)$$

Exercice 3
(3.1) On donne la suite de fonctions

$$f_m(x) = \frac{x^m}{1+x^{2m}}, \quad x \geq 0.$$

Etudier la convergence ponctuelle de cette suite, ainsi que la convergence uniforme sur tout intervalle fermé borné inclus dans $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$.
(3.2) On donne la suite de fonctions

$$f_m(x) = \frac{x^{2m}}{1+x^m}, \quad x \geq 0.$$

Déterminer l'ensemble des réels dans lequel on a la convergence ponctuelle. Et qu'en est-il de la convergence uniforme ?
(3.3) Etudier la convergence ponctuelle et uniforme des suites suivantes, données explicitement

$$f_m(x) = mxe^{-mx}, \quad g_m(x) = mxe^{-m^2x}.$$

(3.4) Etudier la convergence ponctuelle et uniforme des suites suivantes, données explicitement, et donner l'expression explicite de la limite ponctuelle (c'est-à-dire sommer la série).

$$f_m(x) = \sum_{j=0}^{m} x^j, \quad g_m(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{x^j}{j}.$$

Exercice 4 Soient les fonctions données explicitement par

$$f_1(x) = \cos(x),\ f_2(x) = \sin(x)\chi_{[-\pi,\pi]}(x),\ f_3(x) = e^{-x^2},\ f_4(x) = x\,\chi_{]0,+\infty[}(x),\ f_5(x) = \chi_{]-\infty,0]}(x).$$

Pour chaque couple de fonctions (f_j, f_k), $j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, calculer si possible le produit de composition de f_j et f_k.

Exercice 5 (Associativité du produit de composition.) Soient des fonctions f, g, h définies presque partout et qui sont telles que les produits de composition suivants existent

$$|f| \star |g|, \quad (|f| \star |g|) \star |h|.$$

Alors les les produits de composition $(f \star g) \star h$ et $f \star (g \star h)$ existent et sont égaux.

Exercice 6 Soient les fonctions $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$ et $g(x) = e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.
(4.1) Montrer que ces fonctions sont composables et en déterminer le produit de composition.
(4.2) En déduire que quel que soit le naturel strictement positif n, on a

$$f \star \underbrace{g \star \ldots \star g}_{n\ facteurs} \;=\; f.$$

Exercice 7 Soit la fonction f donnée explicitement par $f(x) = x\,\chi_{[0,+\infty[}(x)$. Montrer que $f \star f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, deux fois continuement dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $D^2(f \star f) = f$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 Déterminer si les fonctions suivantes, données explicitement, sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et si c'est le cas, en déterminer les transformées de Fourier.

$$f_1(x) = \sin(\pi x)\chi_{[-1,1]}(x), \quad f_2(x) = \left(\chi_{[-1,1]} \star \chi_{[-1,1]}\right)(x), \quad f_3(x) = \frac{1}{1+x^2},$$
$$f_4(x) = e^{-x}\chi_{[0,+\infty[}(x), \qquad f_5(x) = \tfrac{\sin^2(x)}{x^2}, \qquad f_6(x) = xe^{-2x^2}$$
$$f_7(x) = e^{-|x-1|} \qquad f_8(x) = \cos(x)\,e^{-2|x|} \qquad f_9(x) = x^2\,e^{-x}\,\chi_{[0,+\infty[}(x).$$

Exercice 9 Déterminer si la fonction suivante, donnée explicitement, est intégrable sur $\mathbb{R}$ ou de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. Si c'est le cas, en déterminer la transformée de Fourier.

$$f(x) = \frac{1 - \cos(3x)}{x}$$

Exercice 10
(10.1) On se place dans l'espace $L^2([-\pi,\pi])$ muni du produit scalaire habituel. Dans cet espace, déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de la fonction donnée explicitement par $f(x) = x$. Exprimer le résultat final en n'utilisant que des fonctions sinus et cosinus. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

(10.2) On considère l'espace de Hilbert $L^2([0,1]$.
• Montrer que les fonctions f et g définies par $f(x) = \cos(2\pi x)$ et $g(x) = e^{4i\pi x}$ y sont orthogonales.
• Développer les fonctions g_1, g_2, g_3 suivantes en série trigonométrique de Fourier dans cet espace, en exprimant la réponse finale à l'aide de fonction sinus et cosinus et en simplifiant au maximum l'expression.

$$g_1(x) = \cos(10\pi x), \quad g_2(x) = \cos^4(\pi x), \quad g_3(x) = \cos(\pi x)$$

• En déduire que

$$\frac{\sqrt{2}}{16}\pi = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{2m-1}{16m^2 - 16m + 3}$$

Exercice 11 On donne les fonctions suivantes

$$f_1(x) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right. , \quad f_2(x) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ -e^{x} & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$$

$$f_3(x) = e^{-|x|} (x \in \mathbb{R}), \quad f_4(x) = \frac{1}{1+ix} (x \in \mathbb{R}).$$

(11.1) Pour chacune de ces fonctions, déterminer à quel(s) espace(s) $L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})$ elle appartient.
(11.2) Déterminer ensuite la norme de chacune de ces fonctions dans chacun des espaces auquel elle appartient.
(11.3) Représenter les fonctions f_1, f_2, f_3 dans un même repère orthonormé.
(11.4) Déterminer la transformée de Fourier (-) de f_1, f_2, f_3, en spécifiant s'il s'agit de la transformée dans L^1 ou L^2.
(11.5) Déterminer la transformée de Fourier (+) de f_4, en spécifiant s'il s'agit de la transformée dans L^1 ou L^2. Montrer que cette transformée est nulle sur $]-\infty, 0[$.
(11.6) Déterminer (si possible) le produit de composition $f_1 * f_1$ ainsi que sa transformée de Fourier (-).

Exercice 12 On donne les fonctions suivantes

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right. \quad g(x) = e^{-|x|} (x \in \mathbb{R}).$$

(12.1) Pour chacune de ces fonctions, déterminer à quel(s) espace(s) $L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})$ elle appartient.
(12.2) Déterminer ensuite la norme de chacune de ces fonctions dans chacun des espaces auquel elle appartient.
(12.3) Déterminer la transformée de Fourier (-) de chacune de ces fonctions, en spécifiant s'il

s'agit de la transformée dans L^1 ou L^2.
(12.4) Si R désigne la partie réelle de la transformée de Fourier (-) f et si I désigne la partie imaginaire de cette transformée, montrer que l'on a

$$2\left(R(y)\ - yI(y)\right) = \ \mathcal{F}_y^- g,\ y \in \mathbb{R}.$$

(12.5) Déterminer (si possible) le produit de composition $g*g$ ainsi que sa transformée de Fourier (-).

Exercice 13

Soient les fonctions f, g (d'une variable réelle) données explicitement par

$$f(x) = \sin(x)\ \chi_{[-\pi,\pi]}(x), \qquad g(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^2-1}.$$

(13.1) Si possible, déterminer les transformées de Fourier ($+$ et $-$) de f et g.
(13.2) Si possible, en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\pi x)}{(x^2-1)^2}\ dx.$$

F. Bastin & T. Devos
13 novembre 2025 (v1 111125)