Chapitre 2

Théorèmes fondamentaux du calcul intégral

2.1 Ensembles dénombrables

Définition. Un ensemble est *dénombrable* s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

De la sorte, *tout ensemble fini est dénombrable.* Cependant il existe des ensembles dénombrables qui ne sont pas finis, à savoir $\mathbb{N}$ lui-même par exemple.

Définition. Par extension, on dit qu'une union $\cup_{j\in J} A_j$ d'ensembles est une *union dénombrable* si J est un ensemble dénombrable (ce qui ne signifie pas que l'ensemble $\cup_{j\in J} A_j$ soit dénombrable!).

Les propriétés élémentaires des ensembles dénombrables sont aisées à établir et nous suffiront pour la suite.

Proposition 2.1.1 *Toute partie d'un ensemble dénombrable est un ensemble dénombrable.*$\blacksquare$

Proposition 2.1.2 *Toute union dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.*

Preuve. Nous allons établir le cas le plus défavorable.

Soit $(A_m = \left\{ x_k^{(m)} : k \in \mathbb{N} \right\})_{m\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles dénombrables deux à deux disjoints. Alors $A = \cup_{m=0}^{\infty} A_m$ est dénombrable car on vérifie aisément que

$$f\colon A \to \mathbb{N}; \quad x_k^{(m)} \mapsto \tfrac{1}{2}(k+m)(k+m+1)+k$$

est une bijection (appelée *numérotation diagonale*). La bijection inverse f^{-1} s'interprête comme étant “la loi qui, à $l \in \mathbb{N}$, associe l'élément $x_k^{(m)}$ précédé de l flèches dans le tableau suivant”.

$$
\begin{array}{ccccc}
x_0^{(0)} & x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & x_3^{(0)} & \cdots \\
x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & \cdots \\
x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & \cdots \\
x_0^{(3)} & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

2.2 Ensembles négligeables

Définition. Une partie N de $\mathbb{R}^n$ est *négligeable* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini ou une suite de semi-intervalles dans $\mathbb{R}^n$ dont l'union contient N et dont la somme des mesures est inférieure ou égale à ε.

Exemple. *Tout point de $\mathbb{R}^n$ est négligeable.* (Il s'agit d'un abus de langage signifiant que, *pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\{x\}$ est négligeable*). De fait, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $I =]x_1 - 1/m, x_1] \times \cdots \times]x_n - 1/m, x_n]$ est un semi-intervalle dans $\mathbb{R}^n$, qui contient x et tel que $\text{mes}(I) = m^{-n}$.□

Proposition 2.2.1 *Toute partie d'un ensemble négligeable est négligeable.*∎

Proposition 2.2.2 a) *Toute union finie d'ensembles négligeables est négligeable.*

b) *Plus généralement, toute union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.*

Preuve. a) Soient $N_1, \ldots, N_J$ des ensembles négligeables en nombre fini et soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $j \leq J$, ε/J est un nombre strictement positif: il existe donc un nombre fini ou une suite de semi-intervalles dans $\mathbb{R}^n$ dont l'union contient N_j et dont la somme des mesures est inférieure ou égale à ε/J. Comme toute union finie d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable, tous ces semi-intervalles dans $\mathbb{R}^n$ sont en nombre fini ou peuvent être présentés comme étant les éléments d'une seule suite. La conclusion est alors immédiate: nous avons obtenu un nombre fini ou une suite de semi-intervalles dans $\mathbb{R}^n$ dont l'union contient $N_1 \cup \ldots \cup N_J$ et dont la somme des mesures est inférieure ou égale à ε.

b) La preuve de b) est un raffinement de celle de a).

Vu a), il suffit d'établir le cas de l'union d'une suite $(N_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de parties négligeables de $\mathbb{R}^n$. Fixons $\varepsilon > 0$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $2^{-m}\varepsilon$ est un nombre strictement positif: il existe donc un nombre fini ou une suite de semi-intervalles dans $\mathbb{R}^n$ dont l'union contient N_m et dont la somme des mesures est inférieure ou égale à $2^{-m}\varepsilon$. On continue alors comme dans la preuve de a), en invoquant le fait que toute union dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.∎

Théorème 2.2.3 *Si ω est un ouvert de $\mathbb{R}^J$ avec $J \in \{1, \ldots, n-1\}$ et si les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont réelles et appartiennent à $\mathcal{C}_1(\omega)$, alors l'ensemble $\{\, (f_1(x), \ldots, f_n(x)) : x \in \omega\}$ est une partie négligeable de $\mathbb{R}^n$.*

(Résultat admis n. 1)∎

Corollaire 2.2.4 a) *Dans $\mathbb{R}^2$, toute droite est négligeable.*

b) *Dans $\mathbb{R}^3$, tout plan est négligeable.*

c) *Plus généralement, dans $\mathbb{R}^{n \geq 2}$, tout hyperplan est négligeable.*

Dès lors, la frontière d'un intervalle est toujours un ensemble négligeable.

Preuve. Il suffit d'établir c). Or, dans $\mathbb{R}^{n \geq 2}$, un hyperplan s'écrit

$$H = \{\, x \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = r\}$$

où $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ne sont pas tous nuls et où $r \in \mathbb{R}$. Si, par exemple, on a $a_n \neq 0$, on obtient

$$H = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n-1}, \frac{r - a_1 x_1 - \ldots - a_{n-1} x_{n-1}}{a_n}) : x \in \mathbb{R}^{n-1} \right\},$$

ce qui suffit.∎

Exercice. Etablir que les ensembles

$$\{ (x, \sin(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \} \quad \text{et} \quad \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$$

sont des parties négligeables de $\mathbb{R}^2$.$\square$

Remarque. Il existe des parties de $\mathbb{R}^n$ qui ne sont pas négligeables. Ainsi, on peut établir que les semi-intervalles dans $\mathbb{R}^n$ ne sont jamais négligeables. Par conséquent, dans $\mathbb{R}^n$, une boule n'est jamais négligeable et, plus généralement, les parties de $\mathbb{R}^n$ dont l'intérieur n'est pas vide ne sont pas négligeables. Nous allons admettre ce résultat qui est aussi une conséquence directe du résultat admis n. 5.

Théorème 2.2.5 *Toute partie de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide est non négligeable.* ***(Résultat admis n. 2)***$\blacksquare$

2.3 Presque partout sur $A \subset \mathbb{R}^n$

Définition. Les locutions *"presque partout sur $A \subset \mathbb{R}^n$"* et *"pour presque tout point de $A \subset \mathbb{R}^n$"* sont équivalentes et signifient "sauf sur une partie négligeable de A". On écrit pp sur A et même pp tout simplement si A est égal à $\mathbb{R}^n$.

Ces locutions sont très utiles en théorie de l'intégration et sont notamment utilisées dans les contextes suivants.

a) Une fonction est *définie* pp *sur* $A \subset \mathbb{R}^n$ si l'ensemble des points de A où elle n'est pas définie est négligeable.

Ainsi $1/x$ est une fonction définie pp sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.3.1 *Toute opération algébrique effectuée sur des fonctions définies* pp *sur $A \subset \mathbb{R}^n$ détermine une fonction définie* pp *sur A pour autant que l'ensemble des zéros appartenant à A des éventuels dénominateurs soit négligeable.*

Preuve. De fait, les seuls points de A où l'opération algébrique n'est pas définie sont les points où l'une au moins des fonctions n'est pas définie ou où au moins un des dénominateurs s'annule. Il suffit alors de rappeler que toute union finie d'ensembles négligeables est négligeable.$\blacksquare$

b) Deux fonctions définies pp sur $A \subset \mathbb{R}^n$ sont *égales* pp *sur* A si l'ensemble des points de A où elles ne sont pas égales est négligeable.

Comme toute union finie d'ensembles négligeables est négligeable, des fonctions f et g définies pp sur $A \subset \mathbb{R}^n$ sont donc égales pp sur A si et seulement si

$$\{ x \in A : f \text{ et } g \text{ sont définis en } x \text{ et } f(x) \neq g(x) \}$$

est négligeable.

Proposition 2.3.2 *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Si f, $g \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ sont égaux* pp *sur Ω, alors on a $f = g$ sur Ω.*

Preuve. Soit x_0 un point de Ω. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ suffisamment grand, la boule $\{ x : |x - x_0| \leq 1/m\}$ est incluse dans Ω alors qu'aucune boule de $\mathbb{R}^n$ n'est négligeable. Il existe donc une suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ dans Ω convergeant vers x_0 telle que $f(x_m) = g(x_m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. On tire de suite $f(x_0) = g(x_0)$, vu la continuité de f et de g sur Ω.∎

Remarque. On sait que la frontière de tout intervalle est négligeable. De là, si I est un semi-intervalle dans $\mathbb{R}^n$, les fonctions χ_I, χ_{I^-} et χ_{I° sont égales pp sur $\mathbb{R}^n$.

2.4 Convergences ponctuelle et pp

Définitions. Soient A une partie de $\mathbb{R}^n$, f une fonction définie sur A et $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite de fonctions définies sur A. Alors, la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ *converge ponctuellement sur A vers f* si, pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_m(x))_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge vers $f(x)$. On dit alors que f est la *limite ponctuelle* de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ sur A et on écrit

$$f_m \to f \text{ sur } A \quad \text{ou} \quad f_m \underset{A}{\to} f.$$

Vu le critère de Cauchy, une telle fonction f existe si et seulement si, pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_m(x))_{m\in\mathbb{N}_0}$ est de Cauchy car alors la fonction f est la loi qui, à tout $x \in A$, associe la limite de la suite $(f_m(x))_{m\in\mathbb{N}_0}$.

Définitions. Si A est une partie de $\mathbb{R}^n$, si f est une fonction définie pp sur A et si $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de fonctions définies pp sur A, alors la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ *converge* pp *sur A vers f* s'il existe une partie négligeable N de A telle que, pour tout $x \in A \setminus N$, les fonctions f_m et f soient définies en x et telles que $f_m(x) \to f(x)$. On dit aussi que f est la *limite* pp *sur A* de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$. On écrit

$$f_m \to f \text{ pp } \text{ sur } A.$$

Définition. Une fonction définie pp sur $\mathbb{R}^n$ est *mesurable* si elle est la limite pp sur $\mathbb{R}^n$ d'une suite de fonctions étagées dans $\mathbb{R}^n$.

En fait, toutes les fonctions qu'on rencontre dans les applications de l'analyse mathématique sont mesurables. Aussi, afin d'alléger fortement cette introduction au calcul intégral tout en ne diminuant pas son champ d'application, nous allons admettre l'hypothèse de travail suivante.

Hypothèse de travail. *Nous admettons que toutes les fonctions définies* pp *sur $\mathbb{R}^n$ sont mesurables.*