Produit scalaire

$$D(\vec{g}(t) \bullet \vec{f}(t)) = D\vec{g} \bullet \vec{f} + \vec{g} \bullet D\vec{f}$$

En particulier, si $\vec{f}$ est constant, on a

$$D(\vec{g}(t) \bullet \vec{f}(t)) = D\vec{g} \bullet \vec{f}$$

2.2.2 Exemples courants de fonctions vectorielles

Les fonctions vectorielles les plus utilisées sont les « chemins » et les « couvertures ». Ces fonctions consistent en un paramétrage respectivement de courbes et de surfaces.

La section 2.5 vous permettra de découvrir ces exemples particuliers.

2.3 Opérateurs vectoriels

2.3.1 Le gradient

Soit un champ scalaire $f \quad : \quad \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R} \quad$ (Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$).

Le gradient de f est le champ vectoriel :

$$\begin{aligned}(x,y,z) \mapsto \textbf{grad}\, f = \vec{\nabla} f &= \Big[D_x f(x,y,z)\,, \quad D_y f(x,y,z)\,, \quad D_z f(x,y,z)\Big] \\ &= D_x f(x,y,z)\vec{e}_1 + D_y f(x,y,z)\vec{e}_2 + D_z f(x,y,z)\vec{e}_3\end{aligned}$$

où $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ désigne une base orthornormée de l'espace $\mathbb{R}^3$.

Le gradient est donc un opérateur qui transforme un champ scalaire en un champ vectoriel.

NB : Le gradient d'un champ scalaire est une fonction vectorielle indépendante de la base orthonormée de l'espace dans lequel il est exprimé (voir EK p405 - Théorème 1), le gradient est donc un champ vectoriel.

Remarques

- La dérivée directionnelle de f dans la direction de $\vec{h}$ au point (x_0, y_0, z_0) est $\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \bullet \frac{\vec{h}}{||\vec{h}||}$ (c.f. rappels).
- Soit une surface $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne $f(x,y,z) = 0$. Pour un point (x_0, y_0, z_0) [1] par lequel passe une courbe qui est incluse dans la surface, on a $\forall t$ voisin de t_0

$$F(t) = f(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

donc

$$0 = DF(t_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \bullet [\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)]$$

Le gradient est donc orthogonal à la surface.

Exemples : Déterminer le gradient des fonctions scalaires données explicitement par $f(x,y,z) = x.e^y + z$ et $f(x,y,z) = \frac{1}{r}$ où $r = dist\big(O, P(x,y,z)\big)$.

1. Avec $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0$

2.3.2 La divergence

Soit un champ vectoriel $\vec{f} \in \Omega \to \mathbb{R}^n (\Omega \text{ ouvert } \subset \mathbb{R}^n)$

La divergence de $\vec{f} = [f_1, f_2, f_3]$ est le champ scalaire :

$$(x, y, z) \mapsto \text{div } \vec{f} = D_x f_1 + D_y f_2 + D_z f_3 = "\vec{\nabla} \bullet \vec{f}"$$

Remarques :

- div $\vec{f} = "\vec{\nabla} \bullet \vec{f}"$. Cette dernière égalité indique en fait une notation et n'est pas le produit scalaire de deux vecteurs. Cependant, vu la définition, on peut faire "comme si" c'était le produit scalaire de f et du "vecteur gradient".
- La divergence représente par exemple le rapport entre le flux entrant et sortant d'une membrane.
- Calcul de la divergence de $\vec{v}(x, y, z) = [3xy, 2xy, -yz^2]$ on a : div $\vec{v} = 3y + 2x - 2yz$.
- La divergence est un opérateur qui transforme un champ vectoriel en un champ scalaire.
- La divergence d'un champ vectoriel est une fonction scalaire indépendante du système d'axes dans lequel elle est calculée (voir EK p 411), c'est pour cela que cette fonction scalaire porte le nom de champ scalaire.

2.3.3 Le rotationnel

Soit un champ vectoriel $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3 (\Omega \text{ ouvert } \subset \mathbb{R}^3)$

Le rotationnel de $\vec{f}$ est le champ vectoriel :

$$\mathbf{rot}\vec{f}(x, y, z) = "\vec{\nabla} \wedge \vec{f}" = (D_y f_3 - D_z f_2)\vec{e}_1 + (D_z f_1 - D_x f_3)\vec{e}_2 + (D_x f_2 - D_y f_1)\vec{e}_3$$

Remarques :

- Le rotationnel est un opérateur qui transforme un champ vectoriel en un champ vectoriel.
- Par exemple : le rotationnel est un vecteur parallèle à l'axe de rotation et de module égal à la vitesse angulaire de rotation. Il décrit donc la manière dont un corps tourne autour d'un axe.
- $\vec{v}(x, y, z) = [xy, 3zx, z]$ a pour rotationnel : $\mathbf{rot}\vec{v} = -3x\vec{e}_1 + (3z - x)\vec{e}_3$
- Si vous avez un champ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et dont vous voulez connaître le rotationnel dans $\mathbb{R}^3$, vous considérez simplement que la dernière composante de $\vec{f}$ est nulle.
- A un point de l'espace repésenté par ses coordonnées, le rotationnel associe un vecteur dont la longueur et la direction sont indépendantes du système d'axes dans lequel les coordonnées sont considérées (voir EK p416) ; c'est donc un champ vectoriel.

2.4 Relations importantes entre les opérateurs vectoriels

1. Si $\alpha : \Omega \overset{C_2}{\to} \mathbb{R}$, alors
$$\mathbf{rot}(\vec{\nabla}\alpha) = "\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\alpha" = \vec{0} \text{ dans } \Omega$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\alpha &= [\underbrace{D_x\alpha}_{f_1}, \underbrace{D_y\alpha}_{f_2}, \underbrace{D_z\alpha}_{f_3}] \\
\mathbf{rot}\vec{\nabla}\alpha &= [D_yD_z\alpha - D_zD_y\alpha, D_zD_x\alpha - D_xD_z\alpha, D_xD_y\alpha - D_yD_x\alpha] \\
&= \vec{0} \text{ car nous avons supposé } \alpha \text{ de classe } C_2
\end{aligned}$$

2. Si $\vec{f} : \Omega \overset{C_2}{\to} \mathbb{R}^3$, alors
$$\operatorname{div}(\mathbf{rot}\vec{f}) = "\vec{\nabla} \bullet (\vec{\nabla} \wedge \vec{f})" = 0 \text{ dans } \Omega$$

Preuve
La preuve de cette propriété peut être obtenue par un raisonnement similaire à celui fait ci-dessus.

Théorèmes de primitivation

Nous avons deux relations qui sont toujours vraies pour un ouvert Ω quelconque, est-il possible de leur trouver une réciproque ?

$$\text{Si } \mathbf{rot}\vec{f} = \vec{0} \Longrightarrow \exists ?\alpha \text{ tel que } \mathbf{grad}\,\alpha = \vec{\nabla}\alpha = \vec{f}$$
$$\text{Si } \operatorname{div}\vec{b} = 0 \Longrightarrow \exists ?\vec{f} \text{ tel que } \mathbf{rot}\vec{f} = \vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \vec{b}$$

Parfois mais pas toujours ! !

Remarque : L'utilisation de ces résultats :
Il est important de savoir quand un champ vectoriel dérive d'un potentiel : les intégrales faisant intervenir ces divers éléments représentent/modélisent des situations concrètes.
On revient plus loin sur le cas d'un champ vectoriel dérivant d'un potentiel scalaire dans le cadre des intégrales curvilignes et des fonctions holomorphes.

2.4.1 Théorèmes de primitivation : Réciproque 1

Exemple montrant qu'il n'existe pas toujours une fonction convenant :

Soit $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ et la fonction de classe C_∞

$$f = [\underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{f_1}, \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{f_2}, 0]$$

on a bien le rotationnel de ce champ nul :

$$\begin{aligned}
\mathbf{rot}\vec{f} &= [0, 0, D_x(\frac{x}{x^2+y^2}) - D_y(\frac{-y}{x^2+y^2})] \\
&= [0, 0, \frac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-(x^2+y^2) + 2y^2}{(x^2+y^2)^2}] \\
&= \vec{0} \quad \forall (x,y,z) \in \Omega
\end{aligned}$$

Par l'absurde, supposons qu'il existe une fonction scalaire

$$\alpha : \Omega \overset{C_1}{\to} \mathbb{R} \text{ telle que } \mathbf{grad}\, \alpha = \vec{f} \text{ dans } \Omega \Leftrightarrow [D\alpha_1, D\alpha_2, D\alpha_3] = [f_1, f_2, f_3]$$

Définissons $F(\theta) = \alpha(\cos\theta, \sin\theta, 0)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. On calcule la dérivée de la fonction F par le théorème de dérivation des fonctions composées.

$$\begin{aligned}
D_\theta F(\theta) = D_\theta \alpha(\cos\theta, \sin\theta, 0) &= D_\theta \alpha_1(cos\theta, \sin\theta, 0).(-\sin\theta) + D_\theta \alpha_2(cos\theta, \sin\theta, 0).\cos\theta \\
&= f_1(cos\theta, \sin\theta, 0).(-\sin\theta) + f_2(cos\theta, \sin\theta, 0).\cos\theta \\
&= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \\
&= 1 \qquad \forall \theta \in [0, 2\pi]
\end{aligned}$$

D'autre part on a aussi :

$$I = \int_0^{2\pi} D_\theta F d\theta = F(2\pi) - F(0) = \alpha(1,0,0) - \alpha(1,0,0) = 0$$

Mais nous avons trouvé que la dérivée de F valait 1 en supposant qu' α répondait à la question, donc on obtient aussi

$$I = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi$$

Ce qui conduit à un absurdité. Il n'existe donc pas de fonction scalaire $\alpha : \Omega \overset{C_1}{\to} \mathbb{R}$ telle que $\mathbf{grad}\, \alpha = \vec{f}$ dans Ω

Sous quelles hypothèses la propriété est-elle correcte ?

Un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est dit étoilé par rapport à un point x_0 $(\in \Omega)$ si

$$\forall x \in \Omega, \text{ le segment } \{(1-t)x_0 + tx : t \in [0,1]\} \text{ est inclus dans } \Omega$$

Quelques remarques : notez la différence entre un ouvert étoilé et un connexe ou un convexe.

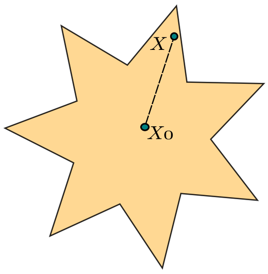

FIGURE 2.2 – Ouvert étoilé

- étoilé $\Rightarrow$ connexe, connexe $\not\Rightarrow$ étoilé.
- étoilé $\not\Rightarrow$ convexe, convexe $\Rightarrow$ étoilé.
- convexe $\Rightarrow$ connexe, connexe $\not\Rightarrow$ convexe.

Théorème

Soit Ω un ouvert étoilé par rapport à x_0 et soient $f_1, ..., f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C_1.
Alors il existe $\alpha \in C_2(\Omega)$ tel que $D_{x_j}\alpha = f_j$, $\forall j \Leftrightarrow$ les f_j vérifient les égalités croisées, à savoir

$$D_{x_j} f_k = D_{x_k} f_j \qquad \forall j, k = 1, \ldots, n$$

Dans $\mathbb{R}^3$, la condition sur les dérivées s'écrit :

$$D_1 f_2 = D_2 f_1 \text{ et } D_1 f_3 = D_3 f_1 \text{ et } D_2 f_3 = D_3 f_2$$

c'est-à-dire $\mathbf{rot}\vec{f} = \vec{0}$.

Ainsi, en bref, dans un ouvert étoilé $\mathbf{rot}\vec{f} = \vec{0} \Leftrightarrow \exists\alpha : \vec{f} = \mathbf{grad}\,\alpha = \vec{\nabla}\alpha$

Remarque : Cette propriété se généralise à d'autres types d'ouverts : ***les ouverts simplement connexes.***
Par définition, un ouvert est dit simplement connexe lorsque tout chemin fermé peut se déformer continûment sur un point, la déformation se faisant dans l'ouvert (c.f. plus loin : on dit que le chemin est homotope à un chemin constant).

Démonstration

$\Rightarrow$ est évident car si vous avez un champ f de classe C_1 tel que les composantes de f soient les dérivées partielles d'un même champ scalaire, alors :

$$D_{x_j} f_k = D_j D_k \alpha = D_{x_k} f_j$$

car α est de classe C_2.

$\Leftarrow$ supposons que l'ouvert soit étoilé par rapport à l'origine. On pose [2] :

$$\alpha(x_1,\dots,x_n) = \int_0^1 \vec{x} \bullet \vec{f}(tx_1,\dots,tx_n)dt$$

où $\vec{x} = [x_1,\dots,x_n]$
L'intégrale est définie car on sait que les points $(tx_1,...,tx_n)$, $t \in [0,1]$ appartiennent à l'ouvert (Ω est étoilé).

On a ici une application d'un cas des intégrales paramétriques pour le calcul des D_{x_j}.

$$\int_0^1 \vec{x} \bullet \vec{f}(tx_1,\dots,tx_n)dt = \int_0^1 \sum_{r=1}^n x_r f_r(\underbrace{tx_1,\dots,tx_n}_{\in\Omega})dt$$

Les intégrales paramétriques s'appliquent très facilement ici car $\vec{f}$ est C_1 et que l'on se trouve sur un compact !

$$\begin{aligned}
D_{x_j}\alpha &\overset{1}{=} \int_0^1 D_{x_j}\Big(\sum_{r=1}^n x_r f_r(tx_1,\dots,tx_n)\Big)dt \\
&\overset{2}{=} \int_0^1 \sum_{r=1}^n D_{x_j}(x_r f_r(tx_1,\dots,tx_n))dt \\
&\overset{3}{=} \int_0^1 \left[\sum_{\substack{r\neq j\\ r=1}}^n x_r t(D_j f_r)(tx_1,\dots,tx_n) + f_j(tx_1,\dots,tx_n) + tx_j(D_j f_j)(tx_1,\dots,tx_n)\right]dt \\
&\overset{4}{=} \int_0^1 \left[\underbrace{\sum_{r=1}^n x_r t\,\overbrace{(D_j f_r)}^{D_r f_j}(tx_1,\dots,tx_n)}_{t\cdot D_t\left(f_j(tx_1,\cdots,tx_n)\right)} + f_j(tx_1,\dots,tx_n)\right]dt \\
&\overset{5}{=} \int_0^1 D_t\big(tf_j(tx_1,\dots,tx_n)\big)dt \\
&\overset{6}{=} f_j(x_1,\dots,x_n)
\end{aligned}$$

1. Passage de la dérivée sous le signe d'intégration par le théorème des intégrales paramétriques.
2. La dérivée d'une somme (finie) est égale à la somme des dérivées.
3. Dérivation d'un produit
4. Recombinaison de la somme.
5. Egalité des dérivées croisées (hypothèse).
6. Calcul de l'intégrale par variation de primitive.

2. Ceci peut être interprété de la manière suivante : α est un potentiel = l'intégration du champ $\vec{f}$ le long du segment joignant l'origine à x.
On peut généraliser ce résultat à d'autres types d'ouverts.
Voir la transition entre les chapitres 2 et 3

Remarque : Comme tout point d'un ouvert Ω est le centre d'un ouvert étoilé (par exemple une boule) qui est inclus dans Ω, on peut déduire du résultat précédent la propriété suivante : si f est de classe C_1 dans un ouvert, alors f dérive **localement** d'un potentiel si et seulement si ses composantes vérifient les égalités des dérivées croisées. Plus précisément :

Soient $f_1, \ldots, f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C_1, alors les f_j vérifient les égalités croisées $\Leftrightarrow \forall x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage de ω_0 de x_0 et $\alpha_0 \in C_2(\omega_0)$ tel que $D_j\alpha_0 = f_j\ \forall j$.

2.4.2 Théorèmes de primitivation : Réciproque 2

Si $\vec{f} : \Omega \overset{C_2}{\to} \mathbb{R}^3$, alors $\operatorname{div}(\mathbf{rot}\vec{f}) =$ "$\vec{\nabla} \bullet (\vec{\nabla} \wedge \vec{f})$" $= 0$ dans Ω.

La réciproque s'écrit : si $\operatorname{div}\vec{b} = 0$, alors $\exists \vec{f}$ tel que $\vec{b} = \mathbf{rot}\vec{f}$. Mais cette relation n'est pas toujours vraie.

La réciproque est vraie si Ω est un ouvert étoilé.

Soit Ω un ouvert étoilé par rapport à x_0 et soit $\vec{b} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ de classe C_1, alors

$$\exists \vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \vec{b} = \mathbf{rot}\vec{f} \Leftrightarrow \operatorname{div}\vec{b} = 0$$

Preuve

$\Rightarrow$ ok

$\Leftarrow$ Supposons l'ouvert étoilé en l'origine ($x_0 = 0$), on pose

$$\vec{f}(x, y, z) = \int_0^1 \vec{b}(tx, ty, tz) \wedge \vec{x} \cdot t\, dt$$

où $\vec{x} = [x, y, z]$

Ensuite, on vérifie que $\vec{f}$ est C_2 par les intégrales paramétriques et donc $\vec{b} = \mathbf{rot}\vec{f}$ dans Ω.

2.4.3 Théorème de primitivation 3 : dans le cas de la divergence

On montre que

$\forall \Omega \subset \mathbb{R}^3, \forall \alpha : \Omega \overset{C_1}{\to} \mathbb{R}$

$$\exists \vec{a} : \Omega \overset{C_2}{\to} \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \operatorname{div}\vec{a} = \alpha$$

Soit $\vec{f} = [f_1, \cdots, f_n] : \Omega \overset{C_1}{\to} \mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}_0$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1. $\exists \alpha : \Omega \overset{C_2}{\to} \mathbb{R}$ tel que :
$$\vec{f} = \mathbf{grad}\, \alpha$$
$$\Updownarrow$$
2. L'intégrale curviligne de $\vec{f}$ pour tout chemin fermé est nulle (ou encore l'intégrale curviligne de $\vec{f}$ ne dépend pas du chemin, seulement des deux extrémités de ce chemin).
$$\Downarrow$$
3. On a égalité des dérivées croisées $D_j f_k = D_k f_j \quad \forall j, k \in \{1, \cdots, n\}$. (càd, quand $n = 3$: $\mathbf{rot}\vec{f} = \vec{0}$)

Si Ω est simplement connexe, on a en plus : 3. $\Rightarrow$ 2.

Remarque :

- Si $\vec{f}$ dérive d'un champ potentiel scalaire alors $\vec{f}$ est appelée un champ exact.
- Les chemins considérés sont constitués de la juxtaposition d'un nombre fini de chemins de classe C_1 (c.f. hypothèses EK p 421)

Preuve : considérons le cas $n = 3$

(1) $\Rightarrow$ (2) ?

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz &= \int_a^b D_1\alpha dx + D_2\alpha dy + D_3\alpha dz \\
&= \int_a^b \Big((D_1\alpha)(\vec{\gamma}(t)) D_t\gamma_1 + (D_2\alpha)(\vec{\gamma}(t)) D_t\gamma_2 + (D_3\alpha)(\vec{\gamma}(t)) D_t\gamma_3 \Big) dt \\
&= \int_a^b D_t(\alpha(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)) dt = \alpha(\vec{\gamma}(b)) - \alpha(\vec{\gamma}(a)) = \alpha(B) - \alpha(A) \qquad (*)
\end{aligned}$$

La solution ne dépend pas du chemin parcouru, seulement des deux extrémités.

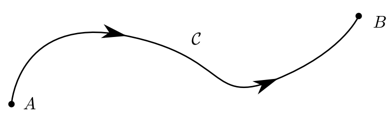

FIGURE 2.7 – Indépendance du chemin

En conséquence,

$$\oint_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dx + f_3 dz = 0 \quad \forall \mathcal{C} \text{ à chemin fermé}$$

est évident car par la relation $(*)$ on a

$$\oint_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \alpha(A) - \alpha(A) = 0$$