Chapitre 6

Compléments sur la théorie de Fourier

6.1 Le théorème d'échantillonnage de Shannon

Le théorème d'échantillonnage de Shannon [1] est un résultat fondamental de la théorie du signal. Il donne également une explication pour un phénomène courant : la vision de roues qui semblent tourner à l'envers [2].

Imaginons ainsi qu'une caméra prend y clichés par seconde d'une roue qui tourne à x tours par seconde (dans le sens des aiguilles d'une montre, pour mieux visualiser) et que l'on fixe un rayon de la roue comme repère. Entre deux clichés successifs, la roue a donc tourné de x/y tour(s). Si $x < y$, entre deux clichés, la roue n'aura ainsi pas fait un tour complet : il lui manque une portion d'arc de $1 - x/y$. Si y^* est le nombre de clichés nécessaires pour voir la roue faire 1 tour complet ≪ à l'envers ≫, alors

$$y^* \times \left(1 - \frac{x}{y}\right) \;=\; 1$$

c'est-à-dire

$$y^* \;=\; \frac{y}{y-x}.$$

Par exemple, si on voit la roue faire 1 tour complet ≪ à l'envers ≫ en 1 seconde, on a pris y clichés donc $y^* = y$ et ainsi

$$y - x \;=\; 1.$$

La différence entre la fréquence réelle (x) et la fréquence d'échantillonnage (y) est appelée *fréquence apparente* et elle est égale à $x - y$. Ici, on a donc $x - y = -1$: la roue tourne ≪ à l'envers ≫ une fois par seconde.

Voir par exemple https ://www.cooperation.ch/rubriques/famille/le-savais-tu/2019/pourquoi-les-roues-tournent-a-l-envers-lorsqu-une-voiture-roule-vite–225667/

1. Claude Elwood Shannon (né le 30 avril 1916 à Petoskey, Michigan - mort le 24 février 2001 à Medford, Massachusetts) est un ingénieur en génie électrique et mathématicien américain. Il est l'un des pères, si ce n'est le père fondateur, de la théorie de l'information. Il a publié la preuve du théorème en 1949. On associe ensuite le nom de Nyquist à ce résultat car celui-ci avait ouvert la voie dès 1928. Shannon et Nyquist ont tous les deux travaillé chez Bell Laboratories.
2. c'est un phénomène aussi appelé ≪ repli du spectre ≫

Une autre illustration consiste à ne regarder que la trotteuse sur une horloge lorsqu'on prend des clichés toutes les 59 secondes (par exemple). On obtient le tableau suivant

$$\begin{array}{ccc} 0 & : & 00 \\ 1 & : & 59 \\ 2 & : & 58 \\ 3 & : & 57 \\ ... & : & ... \end{array}$$

Sur le cadran, la trotteuse semble donc reculer ! Voir par exemple (seulement la trotteuse) https ://couleur-science.eu/ ?d=af1b19–photographie-le-phenomene-de-repliement-de-spectre-ou-lillusion-de-la-roue-qui-tourne-en-sens-inverse

Passons alors au résultat précis de Shannon. Il exprime qu'*un signal limité en fréquence est entièrement déterminé à partir d'un échantillonnage de ce signal correspondant à* ***deux échantillons par période***[3].

Ainsi, dans les illustrations ci-dessus, voir le phénomène de « l'envers » résulte du fait que le pas d'échantillonnage $(1/y)$ est trop petit par rapport à la période de rotation de la roue $(1/x)$.

Et, dans les notations du théorème ci-dessous, la période est $T = 2\pi/\nu$ et le pas d'échantillonnage est $\pi/\nu = T/2$: la fonction est évaluée deux fois par période.

Nous donnons ci-dessous une démonstration du résultat basée sur le développement en série trigonométrique de Fourier. On peut aussi l'obtenir en utilisant la théorie des distributions (ici les distributions de Dirac) ; cette preuve fait ressortir davantage les aspects de la théorie du signal mais nous ne la présentons pas ici car l'acquis mathématique n'est pas suffisant à ce stade.

Théorème 6.1.1. (Théorème d'échantillonnage de Shannon)

Soit ν un réel strictement positif. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$, appartenant à $L^2(\mathbb{R})$ et dont le support de la transformée de Fourier (négative) est inclus dans $[-\nu, \nu]$, alors, dans $L^2(\mathbb{R})$, on a

$$f(x) = \lim_{M\to+\infty} \sum_{m=-M}^{M} f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right) \frac{\sin(\nu x - m\pi)}{\nu x - m\pi}$$

Preuve. Le développement en série trigonométrique de Fourier de $\widehat{f}$ dans $L^2([-\nu, \nu])$ donne

$$\begin{aligned} \widehat{f}(y) &= \frac{1}{2\nu} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\nu}^{\nu} \widehat{f}(u) e^{im\pi u/\nu} du\right) e^{-im\pi y/\nu} \\ &= \frac{1}{2\nu} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^+_{\frac{m\pi}{\nu}} \widehat{f} \ e^{-im\pi y/\nu}. \end{aligned}$$

Cela étant, on a

$$\mathcal{F}^+ \widehat{f} = F^+ \widehat{f} = 2\pi f$$

presque partout mais comme f est continu, cette égalité a lieu partout et on obtient ainsi

$$\widehat{f}(y) = \frac{\pi}{\nu} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right) e^{-im\pi y/\nu},$$

3. dans le langage de l'analyse du signal : « échantillonnage deux fois par cycle de la plus haute fréquence »

la convergence ayant lieu dan $L^2([-\nu,\nu])$. Maintenant, comme $\hat{f} = \hat{f}\chi_{[-\nu,\nu]}$ on obtient alors

$$\begin{aligned}
F_x^+\widehat{f} \;=\; 2\pi\, f(x) \;=\; \int_{-\nu}^{\nu} e^{iyx}\,\widehat{f}(y)\; dy \;&=\; \frac{\pi}{\nu}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right)\int_{-\nu}^{\nu} e^{iyx}\, e^{-im\pi y/\nu}\; dy\\
&=\; \frac{2\pi}{\nu}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right)\frac{\sin(\nu x - m\pi)}{x - m\pi/\nu}\\
&=\; 2\pi\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right)\frac{\sin(\nu x - m\pi)}{\nu x - m\pi}
\end{aligned}$$

dans $L^2(\mathbb{R})$ et on peut conclure.□

Notons que si f a un ≪ bon ≫ comportement à l'infini, la convergence peut être fortement améliorée.

Remarquons aussi que ce résultat exprime qu'après normation, les fonctions

$$x \mapsto \frac{\sin(\nu x - m\pi)}{\nu x - m\pi} \quad m \in \mathbb{Z}$$

forment une base orthonormée de l'espace des fonctions de carré intégrable dont le support de la transformée de Fourier est inclus dans l'intervalle $[-\nu,\nu]$.

6.2 Produit de convolution et transformées de Fourier

Propriété 6.2.1. (Transformées de Fourier et produit de composition)

(1) *Si f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$, alors*

$$\mathcal{F}^{\pm}(f*g) \;=\; \mathcal{F}^{\pm}f \times \mathcal{F}^{\pm}g \quad \textit{partout.}$$

(2) *Si $f \in L^1 \cap L^2$ et si $g \in L^2$ alors*

$$F^{\pm}\,(f*g) \;=\; F^{\pm}f \times F^{\pm}g \;=\; \mathcal{F}^{\pm}f \times F^{\pm}g \quad \textit{presque partout.}$$

Preuve. **(1)** est immédiat en repassant aux définitions (et a d'ailleurs été traité dans le chapitre consacré à la transformation de Fourier des fonctions intégrables.

(2) Soit g_m $(m \in \mathbb{N})$ une suite d'éléments de $L^1 \cap L^2$ qui converge vers g dans L^2. On a donc

$$f*g \;=\; \lim_{m\to+\infty} f*g_m \quad \text{dans } L^2$$

donc aussi

$$F^{\pm}\,(f*g) \;=\; \lim_{m\to+\infty} F^{\pm}\,(f*g_m) \quad \text{dans } L^2.$$

Cela étant, f et g_m étant aussi intégrables, on a

$$F^{\pm}\,(f*g_m) \;=\; \mathcal{F}^{\pm}\,(f*g_m) \;=\; \mathcal{F}^{\pm}f \times \mathcal{F}^{\pm}g_m.$$

Comme la suite $\mathcal{F}^{\pm}g_m$ $(m \in \mathbb{N})$ converge dans L^2 vers $F^{\pm}g$ et comme $\mathcal{F}^{\pm}f$ est une fonction bornée, on obtient

$$\lim_{m\to+\infty} F^{\pm}\,(f*g_m) \;=\; \lim_{m\to+\infty}\left(\mathcal{F}^{\pm}f \times \mathcal{F}^{\pm}g_m\right) \;=\; \mathcal{F}^{\pm}f \times F^{\pm}g \quad \text{dans } L^2.$$