Solutions finales des exercices

Voici les réponses finales des exercices des différentes listes. Le fichier sera mis à jour au fur et à mesure de l'avancement des TP.

Liste 1

Exercice 1 :

(1)

$$x_m \to \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1/2 \\ 1 & \text{si } a = 1/2 \\ \text{diverge} & \text{si } a = -1/2 \\ \infty & \text{si } |a| > 1/2 \end{cases}$$

(2)

$$x_m \to \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ \text{diverge} & \text{si } a = -1 \\ \infty & \text{si } |a| > 1 \end{cases}$$

(3) $x_m \to 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

(4) $x_m \to 0$ pour tout $a > 0$

Exercice 2 :

(1) La série converge absolument.

(2) La série diverge.

(3) La série est semi-convergente.

(4) La série diverge.

Exercice 3 :

(1) La fonction est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $\alpha < 3$.

(2) La fonction est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $\beta \in]-2,-1[$.

Exercice 4 :

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(3x)dx = 0$

(2) La fonction est n'est pas intégrable sur $]-\infty,0[$.

(3) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}} = \pi/2$

Exercice 5 :

(1) $\int_0^1 \frac{a^2-b^2}{\ln(x)}dx = \ln(a+1) - \ln(b+1)$

(2) $\int_0^{+\infty} e^{-bx}\frac{\sin(ax)}{x}dx = \arctan(a/b)$

Exercice 6 :

(1) $\int_\Omega f(x,y)dxdy = \pi^2/2$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx = \pi^2/4$

Liste 2

Exercice 1 : $\lim_{m\to+\infty} \frac{(m!)^{\frac{1}{m}}}{m} = \frac{1}{e}$ et $\lim_{m\to+\infty} \frac{\ln(m!)}{m} - \ln(m) = -1$

Exercice 2 : $\Gamma(5/6) = \frac{2\pi}{\Gamma(1/6)}$

Liste 3

Exercice 1 :

(a) La suite de fonctions converge ponctuellement vers la fonction constante 1 sur $\mathbb{R}$ mais ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

(b) La suite de fonctions ne converge pas ponctuellement (et donc pas uniformément) sur $\mathbb{R}$.

(c) La suite de fonctions converge ponctuellement vers la fonction constante 0 sur $\mathbb{R}$ mais ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

(a) La suite de fonctions converge ponctuellement vers $x \to \frac{1}{x}\chi_{\mathbb{R}_0}(x)$. Elle ne converge uniformément ni sur $\mathbb{R}$, ni sur $]0, +\infty[$, mais elle converge uniformément vers $x \to \frac{1}{x}$ sur les compacts de $]0, +\infty[$.

(b) La suite de fonctions converge ponctuellement vers la fonction constante 0 sur $\mathbb{R}$. Elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ mais elle converge uniformément vers 0 sur les intervalles $]-\infty, r]$ $(r > 0)$.

(c) La suite de fonctions converge ponctuellement vers la fonction constante 0 sur $]0, +\infty[$. Elle ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$, mais elle converge uniformément vers 0 sur les compacts de $]0, +\infty[$.

Exercice 4 :

(a) La suite de fonctions converge vers $\chi_{\{0\}}$ sur $[0, 1]$.

(b) La suite de fonctions ne converge pas uniformément sur $[0, b]$ pour tout $0 < b \leq 1$. Par contre, si $0 < a < b \leq 1$, la suite de fonctions converge uniformément vers 0 sur $[a, b]$.

(c) $\lim_{m\to+\infty} \int_0^1 (1 - x^2)^m dx = 0$

Exercice 6 : $\ln(1 + x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}x^m}{m}, \ x \in]-1, 1[$

Exercice 7 :

(a) La série converge ponctuellement et uniformément sur $[-1, 1]$.

(b) La série est définie et continue sur $[-1, 1]$. Elle est dérivable sur $]-1, 1[$.

Exercice 8 : La première série converge ponctuellement et uniformément sur $[-1, 1]$. La deuxième série converge ponctuellement sur $[-1, 1[$ et uniformément sur les compacts de $]-1, 1[$.

Liste 4

Exercice 1 :

(a) La fonction est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1/2$.

(b) La fonction est intégrable sur $]0, 1[$ mais n'est pas intégrable sur $]1, +\infty[$.

(c) La norme de ln dans $L^1(]0, e[)$ vaut 2.

Exercice 2 : $||f||_1 = \pi \quad ; \quad ||f||_2 = 3\pi/4 \quad ; \quad ||f||_\infty = 1$

Exercice 3 :

(a) $||f||_1 = ||g||_1 = \pi \quad ; \quad ||f||_2 = ||g||_2 = \sqrt{\pi} \quad ; \quad ||f||_\infty = ||g||_\infty = 1$

(b) $\langle f, 2ig \rangle = 0$

Exercice 4 :

(a) $f_m \notin C^0(\mathbb{R}) \quad ; \quad f_m \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$

$||f_m||_1 = 2 \quad ; \quad ||f_m||_2 = \sqrt{\frac{2}{m}} \quad ; \quad ||f_m||_\infty = \frac{1}{m}$

(b) f_m converge ponctuellement vers 0 sur $\mathbb{R}$ et converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

(c) f_m ne converge pas pour la norme $||\ ||_1$, f_m converge vers 0 pour la norme $||\ ||_2$ et f_m converge vers 0 pour la norme $||\ ||_\infty$.

Exercice 5 :

(a) $f_m \in C^0([0, +\infty[) \cap L^1([0, +\infty[) \cap L^2([0, +\infty[) \cap L^\infty([0, +\infty[)$

$||f_m||_1 = \frac{1}{\sqrt{m}} \quad ; \quad ||f_m||_2 = \frac{1}{2} \quad ; \quad ||f_m||_\infty = \sqrt{m}e^{-1}$

(b) f_m converge ponctuellement vers 0 sur $]0, +\infty[$ et f_m ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

(c) f_m converge vers 0 pour la norme $||\ ||_1$, f_m ne converge pas pour la norme $||\ ||_2$ et f_m ne converge pas pour la norme $||\ ||_\infty$.

Exercice 6 :

(a) $A = \mathbb{R}_0$ et f_m converge ponctuellement vers 0 sur $\mathbb{R}_0$.

(b) f_m ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_0$, mais f_m converge uniformément vers 0 sur les ensembles bornés fermés inclus dans $\mathbb{R}_0$.

(c) f_m converge vers 0 pour la norme $||\ ||_1$ et f_m ne converge pas pour la norme $||\ ||_2$.

Exercice 7 :

(a) $||f_m||_1 = \frac{1}{2^{m+1}} \quad ; \quad ||f_m||_2 = \frac{\sqrt{(2m)!}}{2^{2m+1}m!} \quad ; \quad ||f_m||_\infty = \frac{e^{-m}}{m!} \left(\frac{m}{2}\right)^m$

(b) F_M converge ponctuellement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $f : x \to e^{-x}$, F_M converge uniformément vers f sur $[0, +\infty[$.

F_M converge pour les normes $||\ ||_1$ et $||\ ||_2$

Exercice 13 :

(a) La suite de fonctions converge ponctuellement vers 0 sur $\mathbb{R}_0$, elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_0$, mais elle converge uniformément vers 0 sur les compacts de $\mathbb{R}_0$.

(b) $\delta_n \in C^0(\mathbb{R}), \delta_n \in L^1(\mathbb{R})$ et ne converge pas dans $L^1(\mathbb{R}), \delta_n \in L^2(\mathbb{R})$ et ne converge pas dans $L^2(\mathbb{R})$, $\delta_n \in L^\infty(\mathbb{R})$ et ne converge pas dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

Liste 5

Exercice 1 :

(a)

$$f \star g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; y < -1 \\ \frac{(y+1)^2}{4} & \text{si } \; -1 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si } \; 1 < y < 3 \\ 1 - \frac{(y-3)^2}{4} & \text{si } \; 3 \leq y \leq 5 \\ 0 & \text{si } \; y > 5 \end{cases}$$

Exercice 2 :

(a) $f \star g(y) = -ye\chi_{[0,+\infty[}(y), \quad y \in \mathbb{R}$

(b) $f \star g(y) = y \arctan(y) + 1, \quad y \in \mathbb{R}$

(c) $f \star g(y) = e^{-|y|} + |y|e^{-|y|}, \quad y \in \mathbb{R}$

Exercice 5 :

$$\chi_A \star \chi_B(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; |u| > 2 \\ \pi/2 + \arcsin(u+1) + \frac{1}{2}\sin(2\arcsin(u+1)) & \text{si } \; -2 \leq u \leq 0 \\ \pi/2 - \arcsin(u-1) - \frac{1}{2}\sin(2\arcsin(u-1)) & \text{si } \; 0 < u \leq 2 \end{cases}$$

Liste 6

Exercice 1 :

(1) $\mathcal{F}_y f_1 = \frac{-1}{i+iy-1}, \; y \in \mathbb{R}$

(2) $\mathcal{F}_y f_2 = iy\frac{\pi}{2}e^{-\frac{y^2}{4}}, \; y \in \mathbb{R}$

(3) $\mathcal{F}_y f_3 = \frac{2a}{y^2}(1 - \cos(\frac{y}{a})), \; y \in \mathbb{R}_0$

(4) $\mathcal{F}_y f_4 = \frac{2e^{iy}}{1+y^2}, \; y \in \mathbb{R}$

(5) $\mathcal{F}_y f_5 = i\left(\frac{\sin(y-2)}{y-2} - \frac{\sin(y+2)}{y+2}\right), \; y \in \mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$

Exercice 2 :

(1) $\mathcal{F}_y e^{-\lambda|\;\cdot\;|} = \frac{2\lambda}{y^2+\lambda^2}, \; y \in \mathbb{R}$

Exercice 3 : La réciproque est fausse.

Exercice 4 :

(1) $\frac{\pi}{2}\min(a,b)$

(2)

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(ax)\cos(bx)}{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } \; a < b \\ \pi/4 & \text{si } \; a = b \\ \pi/2 & \text{si } \; a > b \end{cases}$$

(3) $\frac{1}{2}\ln|\frac{a+b}{a-b}|$

Exercice 5 : $\pi/4$

Exercice 6 : La transformée de Fourier de f est $\mathcal{F}f : y \mapsto \frac{2}{y^2}(1-\cos(y))$, et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(x)}{x^4}dx = \pi/3$

Liste 7

Exercice 1 :

(1) $\mathbb{F}_y f = \mathcal{F}_y f = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{y^2}{2}}$

(2) $\mathbb{F}_y g = i \ln \left(\left| \frac{y+1}{y-1} \right| \right)$

(3) $\mathbb{F}_y h = \frac{i\pi}{y}(1 - e^{-|y|})$

Exercice 3 :

$$\mathbb{F}_y f = \mathrm{sign}(y)\pi i e^{-|y|}$$

et

$$\mathbb{F}_y g = \begin{cases} 0 & \text{si } \ y > 0 \\ -2i\pi e^y & \text{si } \ y < 0 \end{cases}$$

Liste 8

Exercice 1 : (3) Les complexes a, b et c doivent être distincts.

Exercice 3 : (2) Les développements en séries trigonométriques des 3 fonctions sont les suivants :

$$g_1(x) = \cos(10\pi x)$$

$$g_2(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2\pi x) + \frac{1}{8}\cos(4\pi x)$$

$$g_3(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{8m}{\pi(4m^2-1)} \sin(2\pi m x)$$

Exercice 4 :

(1)

$$f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2m+1)} \sin((2m+1)x)$$

(2) $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}$ et $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Exercice 5 :

(1)

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{4\cos(2mx)}{\pi(1-4m^2)}$$

(2) $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$ et $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1} = \frac{1}{2}$

Exercice 6 :

(1)

$$f(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m (e^\pi - e^{-\pi})}{\pi(1+m^2)} \cos(mx) + \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}$$

(2) $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+m^2)^2} = \frac{1}{4}(e^{2\pi} - e^{-2\pi} + 4\pi)\frac{\pi}{(e^\pi - e^{-\pi})^2} - \frac{1}{2}$ et $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{1+m^2} = \frac{\pi}{e^\pi - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}$