Analyse II (Math0247)
_2020-2021_

A propos de totalité (dans le cadre des séries trigonométriques de Fourier)

Si $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ et si $m \in \mathbb{Z}$, on pose

$$u_m(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{\frac{2i\pi m x}{b-a}},\ x \in \mathbb{R}.$$

Si $f \in L^2([a,b])$ on définit également la suite de sommes partielles suivante

$$S_M(f) = \sum_{m=-M}^{M} < f, u_m > \ u_m, \quad M \in \mathbb{N}_0.$$

Pour alléger les notations, considérons le cas $a = 0$ et $b = 2\pi$.

<u>Résultats auxiliaires</u>

Pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, posons (D_M est appelé noyau de Dirichlet de degré M)

$$D_M(t) = \begin{cases} 2M+1 & \text{si } t \text{ est un multiple entier de } 2\pi \\ \dfrac{\sin\left((2M+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriétés.
(1) Pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, D_M est pair, 2π- périodique et on a

$$D_M(t) = \sum_{m=-M}^{M} e^{imt}, \quad \int_0^{2\pi} D_M(t+a)\ dt \ = \ 2\pi,\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

(2) Pour toute fonction f appartenant à $L^2([0,2\pi])$ et pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, on a

$$S_M(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(x-y) f(y)\ dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si f est défini sur $\mathbb{R}$ et est 2π-périodique, on a

$$S_M(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(y) f(x-y)\ dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(x-y) f(y)\ dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(3) Pour toute fonction f de classe C_2 sur $\mathbb{R}$ et à support compact dans $]0, 2\pi[$, la suite $S_M(f),\ (M \in \mathbb{N}_0)$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$ vers f.

Preuve. (1) Le premier point résulte d'une sommation de termes consécutifs d'une suite géométrique et d'une intégration immédiate.

(2) On a successivement

$$\begin{aligned} S_M(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-M}^{M} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-imy} dy\ e^{imx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-M}^{M} e^{im(x-y)}\ f(y)\ dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(x-y)\ f(y)\ dy \end{aligned}$$

et, si f est 2π-périodique, un changement de variable linéaire conduit au résultat.

(3) Soit f^P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodisation de f considérée sur $[0,2\pi]$. Cela signifie que $f^P(x)=f(x)$ pour $x\in[0,2\pi]$ et $f^P(x)=f(x-2k\pi)$ si $x\in[2k\pi,2(k+1)\pi]$ avec k entier non nul. Notons bien que comme le support de f est un compact de $]0,2\pi[$, on a $f(x)=0$ pour $x\in[0,2\pi]$, voisin de 0 et de 2π. Ainsi pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on a $f^P(x)=0$ pour tout x voisin de $2k\pi$. Dès lors la fonction f^P appartient aussi à $C_2(\mathbb{R})$. Et on a également $S_M(f)=S_M(f^P)$ quel que soit le naturel M.

Pour ne pas alourdir les notations, dans ce qui suit on utilise la notation f au lieu de f^P.

Cela étant, montrons tout d'abord la convergence ponctuelle vers f.

Soit $x\in[0,2\pi]$. Comme

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}D_M(y)f(x)dy$$

pour tout M, on obtient

$$\begin{aligned}S_M(f)(x)-f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}D_M(y)\left(f(x-y)-f(x)\right)dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\left((2M+1)\frac{y}{2}\right)\frac{f(x-y)-f(x)}{\sin(y/2)}dy.\end{aligned}$$

Le théorème de Riemann Lebesgue donne alors

$$\lim_{M\to+\infty}\left(S_M(f)(x)-f(x)\right) = \lim_{M\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\left((2M+1)\frac{y}{2}\right)\frac{f(x-y)-f(x)}{\sin(y/2)}dy = 0$$

pour autant que l'on montre que la fonction

$$y\mapsto\frac{f(x-y)-f(x)}{\sin(y/2)}$$

est intégrable sur $]0,2\pi[$. Cette fonction est continue sur $]0,2\pi[$ et même sur $\mathbb{R}\setminus\{2k\pi:k\in\mathbb{Z}\}$. Comme elle est 2π périodique, il suffit de regarder son intégrabilité en 0. Et celle-ci est directement acquise car

$$\lim_{y\to0}\frac{f(x-y)-f(x)}{\sin(y/2)} = \lim_{y\to0}\left(\frac{f(x-y)-f(x)}{y}\,\frac{y}{\sin(y/2)}\right) = -2Df(y)\ \in\mathbb{C}.$$

Montrons alors que la convergence est uniforme. Pour cela, on utilise le critère de Cauchy. Pour tout m différent de 0, vu la régularité de f et son support, on a successivement

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\ <f,u_m> &= \int_0^{2\pi}f(t)\,e^{-imt}\,dt = -\frac{1}{im}\int_0^{2\pi}f(t)\,De^{-imt}\,dt\\ &= \frac{1}{im}\int_0^{2\pi}Df(t)\,e^{-imt}\,dt\\ &= -\frac{1}{(im)^2}\int_0^{2\pi}Df(t)\,De^{-imt}\,dt\\ &= -\frac{1}{m^2}\int_0^{2\pi}D^2f(t)\,e^{-imt}\,dt\end{aligned}$$

donc

$$<f,u_m> = -\frac{1}{m^2}<D^2f,u_m>\qquad\forall m\in\mathbb{Z}_0.$$

Il s'ensuit que pour tous naturel p,q avec $p<q$, on a

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,2\pi]}|S_p(x)-S_q(x)| &= \sup_{x\in[0,2\pi]}\left|\sum_{m=p+1}^{q}<f,u_m>u_m(x)+\sum_{m=-q}^{-p-1}<f,u_m>u_m(x)\right|\\ &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=p+1}^{q}|<f,u_m>| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-q}^{-p-1}|<f,u_m>|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=p+1}^{q} \frac{1}{m^2} \left|< D^2 f, u_m >\right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-q}^{-p-1} \frac{1}{m^2} \left|< D^2 f, u_m >\right| \\
&\leq 2 \sup_{t\in[0,2\pi]} |D^2 f(t)| \sum_{m=p+1}^{q} \frac{1}{m^2}
\end{aligned}
$$

en utilisant le fait que

$$
\left|< D^2 f, u_m >\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} |D^2 f(t)|\, dt \leq \sqrt{2\pi} \sup_{t\in[0,2\pi]} |D^2 f(t)|
$$

Et on conclut étant donné la convergence de la série de terme général $1/m^2$. $\square$

Remarque

On obtient de façon directe (et analogue) le résultat suivant [1].

Pour toute fonction f de classe C_1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$, on a $f \in L^2([0, 2\pi])$ et

$$
\lim_{M\to+\infty} S_M(f)(x) = f(x)
$$

en tout $x \in]0, 2\pi[$ où f est dérivable. De plus on a

$$
\lim_{M\to+\infty} S_M(f)(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}
$$

en tout $x \in]0, 2\pi[$, avec $f(x+)$ =limite à droite de f en x et avec $f(x-)$ =limite à gauche de f en x et

$$
\lim_{M\to+\infty} S_M(f)(0) = \lim_{M\to+\infty} S_M(f)(2\pi) = \frac{f(0^+) + f((2\pi)^-)}{2}
$$

Totalité *Les fonctions u_m $(m \in \mathbb{Z})$ forment une suite orthonormée totale dans $L^2([a, b])$.*

Preuve. Le fait que la suite est une suite orthonormée résulte d'un calcul direct (cf cours podcast).

Montrons donc sa totalité. Comme précédemment, pour alléger les notations, prenons $a = 0, b = 2\pi$.

Soit donc $f \in L^2([0, 2\pi])$ tel que $< f, u_m >= 0$ quel que soit l'entier m. On doit montrer que $f = 0$. Vu le théorème d'approximation (cas régulier), on sait qu'il existe une suite de fonctions φ_m $(m \in \mathbb{N})$ de fonctions de $C_\infty(\mathbb{R})$ à support dans $]0, 2\pi[$ telle que

$$
\lim_{m\to+\infty} \varphi_m = f \quad \text{dans } L^2[0, 2\pi]).
$$

Cela étant, vu les résultats auxiliaires, on a

$$
\lim_{M\to+\infty} S_M(\varphi_m) = \varphi_m
$$

pour tout m, la convergence étant une convergence uniforme sur $[0, 2\pi]$. Il s'ensuit que

$$
< f, \varphi_m > = \lim_{M\to+\infty} < f, S_M(\varphi_m) >
$$

pour tout m (car ...). Mais vu l'hypothèse, la linéarité du produit scalaire donne $< f, S_M(\varphi_m) >= 0$ quels que soient m, M donc

$$
< f, \varphi_m > = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}.
$$

On conclut alors directement car

$$
\|f\|^2 = < f, f > = \lim_{m\to+\infty} < f, \varphi_m > = 0.
$$

$\square$

F. Bastin, 31 octobre 2020 (V1 : 291020)

1. Il existe également d'autres hypothèses sur f pour obtenir des résultats similaires concernant la convergence ponctuelle des séries trigonométriques de Fourier