Corrigé de l'Examen écrit du 16 août 2017

Consignes

(1) L'examen dure **3h00**.

(2) Répondre aux différentes questions sur des **feuilles séparées**, en y indiquant à chaque fois vos **nom, prénom et section**.

(3) **Justifier toutes vos réponses**. La rédaction, la précision et la clarté de vos raisonnements entreront en compte dans la cote finale de l'examen.

Théorie

Théorie 1.

(a) Définir la notion de transformée de Fourier d'une fonction intégrable dans $\mathbb{R}$.

(b) Énoncer le théorème de Fourier pour les fonctions intégrables et expliquer clairement l'importance de chaque hypothèse.

(c) Écrire explicitement l'égalité intervenant dans le théorème de Fourier au moyen de la définition de la transformée de Fourier.

Solution : Cf. cours.

Théorie 2.

(a) Énoncer le développement limité de Taylor à l'ordre deux pour une fonction deux fois continûment dérivable dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(b) Définir la notion de point stationnaire.

(c) Énoncer le développement de Taylor à l'ordre deux dans le cas d'un point stationnaire et expliquer pourquoi on considère le développement en un tel point dans la recherche des extrema.

(d) Démontrer qu'une matrice réelle symétrique de dimension deux admet toujours deux valeurs propres réelles.

Solution : Cf. cours.

Exercices

Exercice 1. On considère les fonctions f et g (d'une variable réelle) définies par

$$f(x) = e^{-3|x|} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{9+x^2}.$$

(a) Calculer (si possible) les transformées de Fourier (+ et -) de f.

(b) Si cela a du sens, faire de même avec g.

Solution :

(a) D'abord, la fonction f est bien intégrable sur $\mathbb{R}$, car elle est continue sur $\mathbb{R}$ et la limite

$$\lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = 0$$

est finie. Ainsi, si $y \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^{\pm} f &= \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy} e^{-3|x|}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\cos(xy) \pm i \sin(xy)) e^{-3|x|}\, dx \\
&= 2 \int_0^{+\infty} \cos(xy) e^{-3x}\, dx \quad \text{(par partié ou imparité des différents termes)} \\
&= 2\Re\left(\int_0^{+\infty} e^{ixy} e^{-3x}\, dx \right) \\
&= 2\Re\left(\left[\frac{e^{(iy-3)x}}{iy-3} \right]_0^{+\infty} \right).
\end{aligned}$$

Or, on a $\lim_{x\to+\infty} e^{(iy-3)x} = 0$ vu que

$$\lim_{x\to+\infty} \left| e^{(iy-3)x} \right| = \lim_{x\to+\infty} e^{-3x} = 0.$$

Dès lors, on en déduit que

$$\mathcal{F}_y^{\pm} f = 2\Re\left(\frac{1}{3-iy} \right) = 2\Re\left(\frac{3+iy}{9+y^2} \right) = \frac{6}{9+y^2}.$$

(b) Ici aussi, la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}$ (car continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to\infty} x^2 g(x) = 1$). Dès lors, pour $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathcal{F}_y^{\pm} g = \mathcal{F}_y^{\pm} \left(\frac{1}{6} \mathcal{F}^{\mp} f \right) = \frac{1}{6} \mathcal{F}_y^{\pm} \mathcal{F}^{\mp} f = \frac{\pi}{3} f(y) = \frac{\pi e^{-3|y|}}{3}$$

par le théorème de Fourier et car f est continu sur $\mathbb{R}$.

<u>**Exercice 2**</u>. On considère les fonctions f et g (de deux variables réelles) définies par

$$f(x,y) = -x\left((\ln(x))^2 + y^2 \right) \quad \text{et} \quad g(x,y) = xy.$$

(a) Rechercher les éventuels extrema libres des fonctions f et g. Préciser s'ils sont globaux ou non, stricts ou non stricts.

(b) S'ils existent, déterminer les extrema globaux de g sur le cercle de rayon 4 centré à l'origine.

(c) En déduire (s'ils existent) les extrema globaux de g dans l'ensemble (à représenter)

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2+y^2} \le 4 \right\}.$$

Solution :

(a) On voit que la fonction f est définie et de classe C_2 sur l'ensemble

$$B :=]0, +\infty[\times \mathbb{R}.$$

Recherchons les points stationnaires de f sur B :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} D_x f(x,y) = 0 \\ D_y f(x,y) = 0 \end{cases}
&\Leftrightarrow \begin{cases} -\left((\ln(x))^2 + y^2 \right) - 2\ln(x) = 0 \\ -2xy = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -\ln(x)(\ln(x)+2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \quad \text{ou} \quad x = e^{-2} \\ y = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, f admet deux points stationnaires : $(1,0)$ et $(e^{-2},0)$. Considérons maintenant la matrice hessienne de f. On a

$$D_x^2 f(x,y) = -2\frac{\ln(x)+1}{x}, \quad D_x D_y f(x,y) = -2y \quad \text{et} \quad D_y^2 f(x,y) = -2x,$$

de sorte que

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad H_f(e^{-2},0) = \begin{pmatrix} 2e^2 & 0 \\ 0 & -2e^-2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\det\left(H_f(1,0)\right) = 4 > 0 \qquad \text{et} \qquad \det\big(H_f(e^{-2},0)\big) = -4 < 0.$$

Dès lors, $(e^{-2},0)$ n'est pas un extremum pour f, contrairement à $(1,0)$ qui est maximum local strict (car $D_x^2 f(1,0) = -2 < 0$). En fait, vu que

$$f(x,y) \leq 0 = f(1,0)$$

si $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, le point $(1,0)$ est en fait minimum global strict de f.

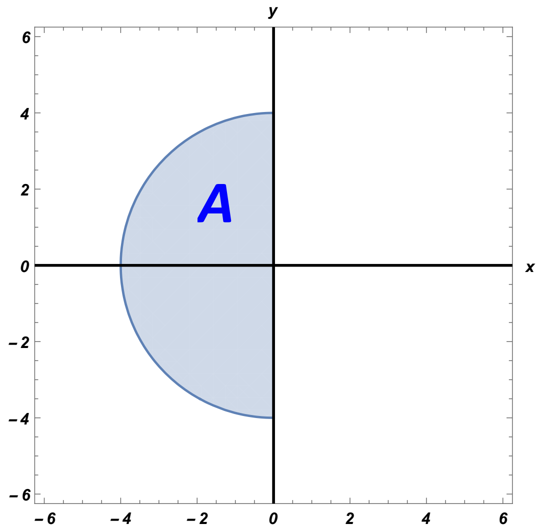
En ce qui concerne g, il est clair que $g \in C_2(\mathbb{R}^2)$ et que $D_x g(x,y) = y$ et $D_y g(x,y) = x$. Donc g admet un point stationnaire en $(0,0)$. En outre, on a

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\det(H_g(0,0)) = -1 < 0$, ce qui prouve que $(0,0)$ n'est pas un extremum pour g.

(b) Un exercice tout à fait similaire a été fait en répétitions (exercice 5). Un corrigé est déjà disponible sur le site de Françoise Bastin. Les maxima de g sur le cercle considéré sont les points $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ et $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, tandis que ses minima sur le cercle sont les points $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ et $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

(c) L'ensemble A peut être représenté comme suit (les bords sont compris) :



Comme il s'agit d'un ensemble borné fermé et comme g est continu sur celui-ci, cette fonction y admet au moins un minimum global et un maximum global.

On va procéder en plusieurs étapes et rechercher les extrema sur les différentes parties constituant A :

- à l'intérieur de A, vu le point (a), on sait que g n'admet aucun extremum.
- sur le demi-cercle, par le point (b), g admet un maximum en $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ et un minimum en $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.
- comme g est nul sur le segment $\{0\} \times [-4,4]$, on en déduit que tous les points de ce segment sont à la fois minima et maxima de g sur celui-ci.

Comme $g(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) = 8 > g(0,y) = 0 > g(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = -8$ pour tout $y \in [-4,4]$, on en déduit que le point $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ est maximum global strict de g sur A et que le point $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ est minimum global strict de g sur A.