2. Extrema libres et sous contrainte

Exercice 1. Déterminer les éventuels extrema libres des fonctions suivantes :

$f_1(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ $\quad f_2(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ $\quad f_3(x,y) = \ln(\ln(x)) - \ln(xy) + 2y^2$

$f_4(x,y) = x^2 + y^4$ $\quad f_5(x,y) = |x| + |y|$ $\quad f_6(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + y^4 - 2y^3$

$f_7(x,y) = y(x^2 + (\ln(y))^2)$ $\quad f_8(x,y) = \sin(xy)$ $\quad f_9(x,y) = (x + y^2 + 2y)\, e^{2x}$

Exercice 2. Déterminer les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto ye^{-x}$ sur le rectangle R de sommets de coordonnées $(0,0)$, $(\ln(2),0)$, $(\ln(2),3)$ et $(0,3)$.

Exercice 3. Déterminer les extrema globaux dans le disque unité fermé des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ et $g(x,y) = x + y$.

Exercice 4. On considère la fonction f de deux variables réelles définie par

$$f(x,y) = 3x + x^2 - 3y - xy + y^2 \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

(i) Déterminer les éventuels extrema libres de f.
(ii) Déterminer si possible les extrema globaux de f sur le cercle centré à l'origine et de rayon 1. Même question avec le cercle centré à l'origine et de rayon 2.
(iii) En déduire les éventuels extrema globaux de f sur les disques

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\right\} \quad \text{et} \quad D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 2\right\}.$$

Exercice 5. On donne les fonctions f et g explicitement par

$$f(x,y) = xy \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = 4x^2 + y^2.$$

(i) Déterminer les éventuels extrema libres de f.
(ii) S'ils existent, déterminer les extrema de f sous la contrainte $g(x,y) = 1$.
(iii) S'ils existent, déterminer les extrema de f dans l'ensemble (à représenter)

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } g(x,y) \leq 1\right\}.$$

Exercice 6. (i) Déterminer les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2y$ sur la partie du plan

$$\mathcal{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\right\}.$$

(ii) Déterminer les extrema de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1$ dans le disque centré en l'origine et de rayon 3.