

---

## 2. Extrema libres et sous contrainte

---

**Exercice 1.** Déterminer les éventuels extrema libres des fonctions suivantes :

$$f_1(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

$$f_2(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f_3(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$f_4(x, y) = x^2 + y^4$$

$$f_5(x, y) = |x| + |y|$$

$$f_6(x, y) = e^{-y}(x^4 + 2x^2 + y^4)$$

$$f_7(x, y) = y(x^2 + (\ln(y))^2)$$

$$f_8(x, y) = \sin(xy)$$

$$f_9(x, y) = (x + y^2 + 2y)e^{2x}$$

**Exercice 2.** Déterminer les extrema de la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto ye^{-x}$  sur le rectangle  $R$  de sommets de coordonnées  $(0, 0)$ ,  $(\ln(2), 0)$ ,  $(\ln(2), 3)$  et  $(0, 3)$ .

**Exercice 3.** Déterminer les extrema globaux dans le disque unité fermé des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = x^2 + 4y^2$  et  $g(x, y) = x + y$ .

**Exercice 4.** On considère la fonction  $f$  de deux variables réelles définie par

$$f(x, y) = 3x + x^2 - 3y - xy + y^2 \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

- (a) Déterminer les éventuels extrema libres de  $f$ .
- (b) Déterminer si possible les extrema globaux de  $f$  sur le cercle centré à l'origine et de rayon 1. Même question avec le cercle centré à l'origine et de rayon 2.
- (c) En déduire les éventuels extrema globaux de  $f$  sur les disques

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\} \quad \text{et} \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}.$$

**Exercice 5.** On considère la fonction  $f$  (de deux variables réelles) définie par

$$f(x, y) = x^3 + y^3.$$

- (a) Rechercher les éventuels extrema libres de la fonction  $f$ . Préciser s'ils sont globaux ou non, stricts ou non stricts.
- (b) S'ils existent, déterminer les extrema globaux de  $f$  sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine.
- (c) En déduire (s'ils existent) les extrema globaux de  $f$  dans l'ensemble (à représenter)

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \quad \text{et} \quad y \leq 0\}.$$

**Exercice 6.** On donne les fonctions  $f$  et  $g$  explicitement par

$$f(x, y) = xy \quad \text{et} \quad g(x, y) = 4x^2 + y^2.$$

- (a) Déterminer les éventuels extrema libres de  $f$ .
- (b) S'ils existent, déterminer les extrema de  $f$  sous la contrainte  $g(x, y) = 1$ .
- (c) S'ils existent, déterminer les extrema de  $f$  dans l'ensemble (à représenter)

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } g(x, y) \leq 1\}.$$

**Exercice 7.** (a) Déterminer les extrema de la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2y$  sur la partie du plan

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

- (b) Déterminer les extrema de la fonction  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$  dans le disque centré en l'origine et de rayon 3.