
2. Extrema libres et sous contrainte

Exercice 1. Déterminer les éventuels extrema libres des fonctions suivantes :

$$f_1(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy \qquad f_2(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad f_3(x, y) = \ln(\ln(x)) - \ln(xy) + 2y^2$$

$$f_4(x, y) = x^2 + y^4 \qquad f_5(x, y) = |x| + |y| \qquad f_6(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + y^4 - 2y^3$$

$$f_7(x, y) = y(x^2 + (\ln(y))^2) \qquad f_8(x, y) = \sin(xy) \qquad f_9(x, y) = (x + y^2 + 2y)e^{2x}$$

Exercice 2. Déterminer les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto ye^{-x}$ sur le rectangle R de sommets de coordonnées $(0, 0)$, $(\ln(2), 0)$, $(\ln(2), 3)$ et $(0, 3)$.

Exercice 3. Déterminer les extrema globaux dans le disque unité fermé des fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = 3x^4 + y^4$ et $g(x, y) = x + y$.

Exercice 4. On considère la fonction f de deux variables réelles définie par

$$f(x, y) = 3x + x^2 - 3y - xy + y^2 \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

- Déterminer les éventuels extrema libres de f .
- Déterminer si possible les extrema globaux de f sur le cercle centré à l'origine et de rayon 1. Même question avec le cercle centré à l'origine et de rayon 2.
- En déduire les éventuels extrema globaux de f sur les disques

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\} \quad \text{et} \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}.$$

Exercice 5. On considère la fonction f (de deux variables réelles) définie par

$$f(x, y) = x^3 + y^3.$$

- Rechercher les éventuels extrema libres de la fonction f . Préciser s'ils sont globaux ou non, stricts ou non stricts.
- S'ils existent, déterminer les extrema globaux de f sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine.
- En déduire (s'ils existent) les extrema globaux de f dans l'ensemble (à représenter)

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \quad \text{et} \quad y \leq 0\}.$$

Exercice 6. On donne les fonctions f et g explicitement par

$$f(x, y) = xy \quad \text{et} \quad g(x, y) = 4x^2 + y^2.$$

- Déterminer les éventuels extrema libres de f .
- S'ils existent, déterminer les extrema de f sous la contrainte $g(x, y) = 1$.
- S'ils existent, déterminer les extrema de f dans l'ensemble (à représenter)

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } g(x, y) \leq 1\}.$$

Exercice 7. (a) Déterminer les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2y$ sur la partie du plan

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

- Déterminer les extrema de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$ dans le disque centré en l'origine et de rayon 3.