1. Intégrales paramétriques, transformées de Fourier et produit de convolution

Exercice 1. Soient $a, b > 0$. Si possible, calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x}\, dx.$$

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $p > 0$. Prouver l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} e^{-px}\, dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{b^2 + p^2}{a^2 + p^2}\right).$$

Exercice 3. Si possible, calculer les transformées de Fourier des fonctions f_1, f_2 et f_3 définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = xe^{-x}\chi_{[0,+\infty[}(x), \quad f_2(x) = e^{ix}e^{-|x|} \quad \text{et} \quad f_3(x) = e^{-|x-1|}.$$

Exercice 4. Soient $a, b \in]0, +\infty[$ et $c \in \mathbb{R}$.

(1) Déterminer si possible les transformées de Fourier de la fonction f_a définie par $f_a(x) = e^{-a|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

(2) Faire de même avec la fonction g_a définie par $g_a(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(3) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(cx)}{x^2 + a^2}\, dx.$$

(4) En utilisant le théorème de transfert, calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}.$$

(5) Calculer si possible

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \sin(x)\, dx.$$

Exercice 5. (1) Si possible, déterminer les transformées de Fourier des fonctions f et g (d'une variable réelle) définies par

$$f(x) = \sin(x)\chi_{[-\pi,\pi]}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = (1 - x^2)\chi_{[-1,1]}(x).$$

(2) Si possible, en déduire les transformées de Fourier des fonctions F et G (d'une variable réelle) définies par

$$F(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1 - x^2} \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^3}.$$

(3) Si cela a un sens, en déduire les valeurs des intégrales

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\pi x)}{(1 - x^2)^2}\, dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{(\sin(x) - x\cos(x))^2}{x^6}\, dx.$$

Exercice 6. (1) Si possible déterminer le produit de convolution des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{et} \quad g(x) = x.$$

(2) Même question avec

$$f(x) = e^{x}\chi_{[1,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = x\chi_{[-1,+\infty[}(x).$$

Exercice 7. (1) S'il est défini, déterminer le produit de convolution des fonctions $\chi_{[-1,1]}$ et $\chi_{[-2,2]}$.

(2) Si possible, calculer
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin(x)\sin(2x)}{x^2}\,dx.$$

Exercice 8. (1) Si possible, déterminer le produit de convolution des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(2) Représenter graphiquement les fonctions f, g et $f \star g$.