
Test sur de la matière vue au bloc 1 : Solutions

Exercice 1. (a) Les solutions de l'exercice sont reprises dans le tableau suivant :

	\Re	\Im	$ \cdot $
z_1	-1	0	1
z_2	1	1	$\sqrt{2}$
z_3	-1/2	1/2	$\sqrt{2}/2$
z_4	$e^{\Re\alpha} \cos(\Im\alpha)$	$e^{\Re\alpha} \sin(\Im\alpha)$	$e^{\Re\alpha}$

En particulier, si $\alpha = it$, avec $t \in \mathbb{R}$, alors $\Re z_4 = \cos(t)$, $\Im z_4 = \sin(t)$ et $|z_4| = 1$.

(b) Les solutions (aussi bien dans \mathbb{R} que dans \mathbb{C}) de la première équation sont 0 et 3. Par contre, la seconde équation n'admet aucune solution réelle. Ses solutions complexes sont alors $1 + i$ et $1 - i$.

Exercice 2. (a) La matrice A est inversible lorsque $a \in [\pi, 5\pi] \setminus \left\{ \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{19\pi}{4} \right\}$ et, pour un tel a ,

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5} \sin(2) (\sqrt{2} \cos(a) + 1)} \begin{pmatrix} \sin(2) & \cos(2) \\ -\sqrt{5} \operatorname{tg}(2) & \sqrt{10} \cos(a) \end{pmatrix}.$$

(b) Les valeurs propres de la matrice B sont $2 + i$ et $2 - i$. La matrice B est diagonalisable et la matrice

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

est telle que

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. (a) Les réponses sont compilées dans le tableau suivant :

	Domaine de dérivabilité	Dérivée première
f_1	\mathbb{R}	$\frac{\cos(x)}{1 + \sin^2(x)}$
f_2	$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[$	$\frac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos x}}$
f_3	$] -\infty ; -2 [\cup] 1 ; +\infty [$	$\frac{2x+1}{x^2+x-2}$
f_4	\mathbb{R}	$\ln(2)2^x$

(b) Les solutions générales de l'équation différentielles s'écrivent

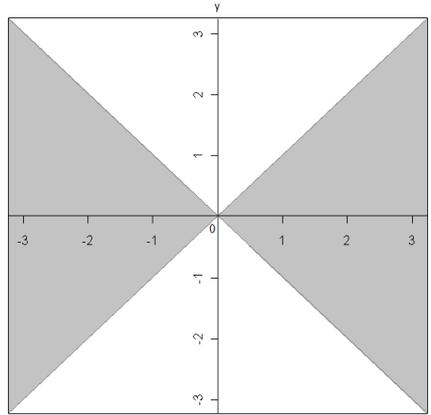
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto \left(\frac{x}{4} + C_1 \right) e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Exercice 4. Le domaine de dérivabilité de la fonction f est l'ensemble

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < |x|\}.$$

Il peut être représenté par l'aire grise donnée ci-dessous (dont les bords ne sont pas compris dans l'ensemble).



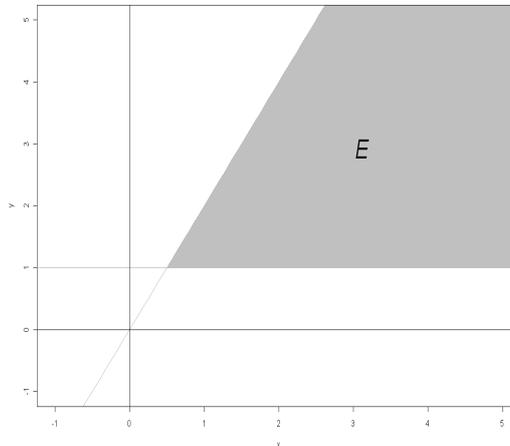
Si $(x, y) \in A$ et si $y \neq 0$, on a

$$\frac{1}{y}D_x f(x, y) + \frac{1}{x}D_y f(x, y) = 0.$$

Exercice 5. La fonction du point (a) n'est pas intégrable sur l'intervalle proposé. Pour le reste, les intégrales sont définies et valent respectivement

- (b) 0;
- (c) $\frac{2}{1 + \pi^2}$;
- (d) $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 6. L'ensemble E peut se représenter comme suit (les bords sont compris).



L'intégrale demandée vaut 1.

- Exercice 7.** (i) Les deux premières séries convergent, mais pas la troisième. La somme de la première série vaut $-1/3$, tandis que la somme de la deuxième vaut $\frac{1-e}{e}$.
- (ii) La série converge si et seulement si $\alpha \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$.