Test de rentrée : Solutions

Exercice 1. (a) Les solutions de l'exercice sont reprises dans le tableau suivant :

	$\Re$	$\Im$	$\lvert . \rvert$
z_1	-1	0	1
z_2	1	1	$\sqrt{2}$
z_3	$-1/2$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$
z_4	$e^{\Re\alpha}\cos(\Im\alpha)$	$e^{\Re\alpha}\sin(\Im\alpha)$	$e^{\Re\alpha}$

En particulier, si $\alpha = it$, avec $t \in \mathbb{R}$, alors $\Re z_4 = \cos(t)$, $\Im z_4 = \sin(t)$ et $|z_4| = 1$.

(b) Les solutions (aussi bien dans $\mathbb{R}$ que dans $\mathbb{C}$) de la première équation sont 0 et 3. Par contre, la seconde équation n'admet aucune solution réelle. Ses solutions complexes sont alors $1+i$ et $1-i$.

Exercice 2. (a) La matrice A est inversible lorsque $a \in [\pi, 5\pi] \setminus \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4} \frac{19\pi}{4}\right\}$ et, pour un tel a,

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}\sin(2)\left(\sqrt{2}\cos(a)+1\right)} \begin{pmatrix} \sin(2) & \cos(2) \\ -\sqrt{5}\,\mathrm{tg}(2) & \sqrt{10}\cos(a) \end{pmatrix}.$$

(b) Les valeurs propres de la matrice B sont $2+i$ et $2-i$. La matrice B est diagonalisable et la matrice

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

est telle que

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. (a) Les réponses sont compilées dans le tableau suivant :

	Domaine de dérivabilité	Dérivée première
f_1	$\mathbb{R}$	$\dfrac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$
f_2	$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right[$	$\dfrac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos x}}$
f_3	$]-\infty;-2\,[\,\cup\,]\,1;+\infty\,[$	$\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$
f_4	$\mathbb{R}$	$\ln(2)2^x$

(b) Les solutions générales de l'équation différentielles s'écrivent

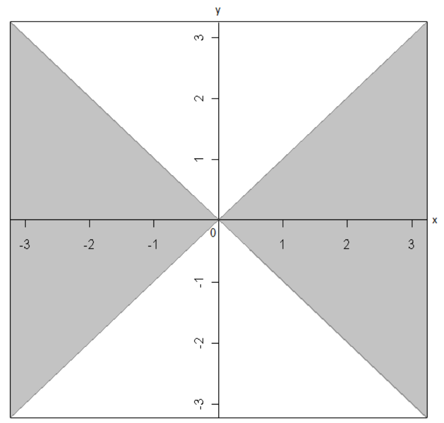
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto \left(\frac{x}{4} + C_1\right)e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Exercice 4. Le domaine de dérivabilité de la fonction f est l'ensemble

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < |x|\right\}.$$

Il peut être représenté par l'aire grise donnée ci-dessous (dont les bords ne sont pas compris dans l'ensemble).



Si $(x,y) \in A$ et si $y \neq 0$, on a

$$\frac{1}{y} D_x f(x,y) + \frac{1}{x} D_y f(x,y) = 0.$$

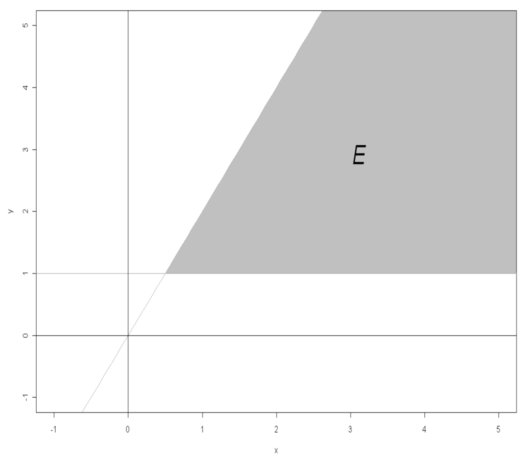
Exercice 5. La fonction du point (a) n'est pas intégrable sur l'intervalle proposé. Pour le reste, les intégrales sont définies et valent respectivement

(b) 0 ;

(c) $\dfrac{2}{1+\pi^2}$;

(d) $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 6. L'ensemble E peut se représenter comme suit (les bords sont compris).



L'intégrale demandée vaut 1.