Test sur de la matière vue au bloc 1

Exercice 1. (a) Déterminer les parties réelle, imaginaire et le module des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -1, \quad z_2 = 1 + i, \quad z_3 = \frac{i^{39}}{i-1} \quad \text{et} \quad z_4 = e^{\alpha},$$

où α est un complexe quelconque. Que se passe-t-il en particulier si α est imaginaire pur ?

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$x^4 = x^2(6x - 9) \qquad \text{et} \qquad x^2 + 2 = 2x.$$

Exercice 2. Soient un réel a et les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{10}\cos(a) & \cos(2-\pi) \\ \sqrt{5}\,\mathrm{cotg}\,(\pi/2 - 2) & \sin(2) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de a dans $[\pi, 5\pi]$ la matrice A est-elle inversible ? Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse et vérifier que la réponse obtenue est correcte.

(b) Rechercher les valeurs propres de la matrice B. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, en déterminer une forme diagonale et une matrice qui y conduit.

Exercice 3. (a) Donner le domaine de dérivabilité ainsi que la dérivée première des fonctions

$$f_1 : x \mapsto \mathrm{arctg}(\sin(x)), \qquad f_2 : x \mapsto \sqrt{\cos(x)}, \qquad f_3 : x \mapsto \ln(x^2 + x - 2) \qquad \text{et} \qquad f_3 : x \mapsto 2^x.$$

(b) Résoudre l'équation différentielle

$$D^2 f(x) - 4f(x) = 1 + e^{2x}.$$

Exercice 4. Soit la fonction f (de deux variables réelles) définie par

$$f(x, y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right).$$

Déterminer le domaine de dérivabilité de f et le représenter. Si elle a un sens, calculer l'expression $\frac{1}{y} D_x f(x, y) + \frac{1}{x} D_y f(x, y)$.

Exercice 5. Calculer si possible les intégrales suivantes :

$$\text{(a)} \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{(b)} \int_{7\pi/2}^{13\pi/2} \sin(2x)\sin(4x)\,dx \quad \text{(c)} \int_{\mathbb{R}} \cos(\pi x) e^{-|x|}\,dx \quad \text{(d)} \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2(x)}}.$$

Exercice 6. Représenter graphiquement l'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le y \le 2x\}$. Calculer (si possible) l'intégrale double

$$\iint_E \frac{dxdy}{x^2 y^2}$$

en choisissant un ordre d'intégration. Permuter ensuite les intégrales et vérifier (en effectuant les calculs) si le résultat change ou non.

Exercice 7.

(a) Déterminer si les séries suivantes convergent et déterminer la somme des séries convergentes :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left[\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]^m, \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\ln(m^2+1) - \ln(3m^2+2)\right).$$

(b) Soit α un nombre réel. Étudier la convergence de la série suivante en fonction de α :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} m^{-1/2-\cos(\alpha)}.$$

F. Bastin et L. Demeulenaere – 15 septembre 2017