
Test de rentrée

Exercice 1. (a) Déterminer les parties réelle, imaginaire et le module des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -1, \quad z_2 = 1 + i, \quad z_3 = \frac{i^{39}}{i-1} \quad \text{et} \quad z_4 = e^\alpha,$$

où α est un complexe quelconque. Que se passe-t-il en particulier si α est imaginaire pur ?

(b) Résoudre dans \mathbb{R} et dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$x^4 = x^2(6x - 9) \quad \text{et} \quad x^2 + 2 = 2x.$$

Exercice 2. Soient un réel a et les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{10} \cos(a) & \cos(2 - \pi) \\ \sqrt{5} \cotg(\pi/2 - 2) & \sin(2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de a dans $[\pi, 5\pi]$ la matrice A est-elle inversible? Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse et vérifier que la réponse obtenue est correcte.

(b) Rechercher les valeurs propres de la matrice B . Cette matrice est-elle diagonalisable? Si c'est le cas, en déterminer une forme diagonale et une matrice qui y conduit.

Exercice 3. (a) Donner le domaine de dérivabilité ainsi que la dérivée première des fonctions

$$f_1 : x \mapsto \arctg(\sin(x)), \quad f_2 : x \mapsto \sqrt{\cos(x)}, \quad f_3 : x \mapsto \ln(x^2 + x - 2) \quad \text{et} \quad f_4 : x \mapsto 2^x.$$

(b) Résoudre l'équation différentielle

$$D^2 f(x) - 4f(x) = 1 + e^{2x}.$$

Exercice 4. Soit la fonction f (de deux variables réelles) définie par

$$f(x, y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right).$$

Déterminer le domaine de dérivabilité de f et le représenter. Si elle a un sens, calculer l'expression $\frac{1}{y} D_x f(x, y) + \frac{1}{x} D_y f(x, y)$.

Exercice 5. Calculer si possible les intégrales suivantes :

$$(a) \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \quad (b) \int_{7\pi/2}^{13\pi/2} \sin(2x) \sin(4x) dx \quad (c) \int_{\mathbb{R}} \cos(\pi x) e^{-|x|} dx \quad (d) \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1 - \ln^2(x)}}.$$

Exercice 6. Représenter graphiquement l'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2x\}$. Calculer (si possible) l'intégrale double

$$\iint_E \frac{dx dy}{x^2 y^2}$$

en choisissant un ordre d'intégration. Permuter ensuite les intégrales et vérifier (en effectuant les calculs) si le résultat change ou non.