

---

## Test de rentrée

---

**Exercice 1.** (a) Déterminer les parties réelle, imaginaire et le module des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -1, \quad z_2 = 1 + i, \quad z_3 = \frac{i^{39}}{i-1} \quad \text{et} \quad z_4 = e^\alpha,$$

où  $\alpha$  est un complexe quelconque. Que se passe-t-il en particulier si  $\alpha$  est imaginaire pur ?

(b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  et dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$x^4 = x^2(6x - 9) \quad \text{et} \quad x^2 + 2 = 2x.$$

**Exercice 2.** Soient un réel  $a$  et les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{10} \cos(a) & \cos(2 - \pi) \\ \sqrt{5} \cotg(\pi/2 - 2) & \sin(2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de  $a$  dans  $[\pi, 5\pi]$  la matrice  $A$  est-elle inversible ? Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse et vérifier que la réponse obtenue est correcte.

(b) Rechercher les valeurs propres de la matrice  $B$ . Cette matrice est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, en déterminer une forme diagonale et une matrice qui y conduit.

**Exercice 3.** (a) Donner le domaine de dérivabilité ainsi que la dérivée première des fonctions

$$f_1 : x \mapsto \arctg(\sin(x)), \quad f_2 : x \mapsto \sqrt{\cos(x)}, \quad f_3 : x \mapsto \ln(x^2 + x - 2) \quad \text{et} \quad f_4 : x \mapsto 2^x.$$

(b) Résoudre l'équation différentielle

$$D^2 f(x) - 4f(x) = 1 + e^{2x}.$$

**Exercice 4.** Soit la fonction  $f$  (de deux variables réelles) définie par

$$f(x, y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right).$$

Déterminer le domaine de dérivabilité de  $f$  et le représenter. Si elle a un sens, calculer l'expression  $\frac{1}{y}D_x f(x, y) + \frac{1}{x}D_y f(x, y)$ .

**Exercice 5.** Calculer si possible les intégrales suivantes :

$$(a) \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \quad (b) \int_{7\pi/2}^{13\pi/2} \sin(2x) \sin(4x) dx \quad (c) \int_{\mathbb{R}} \cos(\pi x) e^{-|x|} dx \quad (d) \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2(x)}}.$$

**Exercice 6.** Représenter graphiquement l'ensemble  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2x\}$ . Calculer (si possible) l'intégrale double

$$\iint_E \frac{dx dy}{x^2 y^2}$$

en choisissant un ordre d'intégration. Permuter ensuite les intégrales et vérifier (en effectuant les calculs) si le résultat change ou non.