Test de rentrée

Exercice 1. (a) Déterminer les parties réelle, imaginaire et le module des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -1, \quad z_2 = 1 + i, \quad z_3 = \frac{i^{39}}{i-1} \quad \text{et} \quad z_4 = e^{\alpha},$$

où α est un complexe quelconque. Que se passe-t-il en particulier si α est imaginaire pur ?

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$x^4 = x^2(6x - 9) \qquad \text{et} \qquad x^2 + 2 = 2x.$$

Exercice 2. Soient un réel a et les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{10}\cos(a) & \cos(2-\pi) \\ \sqrt{5}\operatorname{cotg}(\pi/2 - 2) & \sin(2) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de a dans $[\pi, 5\pi]$ la matrice A est-elle inversible ? Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse et vérifier que la réponse obtenue est correcte.

(b) Rechercher les valeurs propres de la matrice B. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, en déterminer une forme diagonale et une matrice qui y conduit.

Exercice 3. (a) Donner le domaine de dérivabilité ainsi que la dérivée première des fonctions

$$f_1 : x \mapsto \operatorname{arctg}(\sin(x)), \qquad f_2 : x \mapsto \sqrt{1-x^2}, \qquad f_3 : x \mapsto \ln(x^2 + x - 2) \qquad \text{et} \qquad f_4 : x \mapsto 2^x.$$

(b) Résoudre l'équation différentielle

$$D^2 f(x) - 4f(x) = 1 + e^{2x}.$$

Exercice 4. Calculer si possible les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)\, dx$ (c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x| e^{-|x|}\, dx$ (d) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$ (e) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$