Corrigé de l'Examen écrit du 8 janvier 2019

Exercice 1. On considère les fonctions f et g (d'une variable réelle) définies par

$$f(x) = \cos(x/2)\chi_{[-\pi,\pi]}(x) \qquad \textbf{et} \qquad g(x) = \frac{\cos(\pi x)}{4x^2-1}.$$

(a) Calculer (si possible) les transformées de Fourier (+ et -) de f.

(b) Si cela a du sens, faire de même avec g.

Solution :

(a) La fonction f est bien intégrable sur $\mathbb{R}$, vu qu'elle est intégrable sur l'intervalle borné fermé $[-\pi,\pi]$ (par continuité) et nulle en-dehors. Ainsi, si $y \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_y^{\pm} f &= \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy}\cos(x/2)\chi_{[-\pi,\pi]}(x)\,dx\\ &= 2\int_0^{\pi}\cos(xy)\cos(x/2)\,dx\\ &= \int_0^{\pi}\cos((y+1/2)x)\,dx + \int_0^{\pi}\cos((y-1/2)x)\,dx.\end{aligned}$$

Or, on a

$$\int_0^{\pi}\cos((y+1/2)x)\,dx = \begin{cases}\left[\frac{\sin((y+1/2)x)}{y+1/2}\right]_0^{\pi} \text{ si } y \neq -1/2\\ \int_0^{\pi} 1\,dx \text{ si } y=-1/2\end{cases} = \begin{cases}\frac{\sin((y+1/2)\pi)}{y+1/2} \text{ si } y\neq -1/2\\ \pi \text{ si } y=-1/2.\end{cases}$$

De même,

$$\int_0^{\pi}\cos((y-1/2)x)\,dx = \begin{cases}\left[\frac{\sin((y-1/2)x)}{y-1/2}\right]_0^{\pi} \text{ si } y \neq 1/2\\ \int_0^{\pi} 1\,dx \text{ si } y=1/2\end{cases} = \begin{cases}\frac{\sin((y-1/2)\pi)}{y-1/2} \text{ si } y\neq 1/2\\ \pi \text{ si } y=1/2.\end{cases}$$

Comme
- $\sin(\pi y+\pi/2) = \sin(\pi/2-(-\pi y)) = \cos(\pi y)$,
- $\sin(\pi y-\pi/2) = -\sin(\pi/2-\pi y) = -\cos(\pi y)$,
- $\dfrac{1}{y+1/2} + \dfrac{-1}{y-1/2} = \dfrac{-4}{4y^2-1}$,
- $\cos(\pi/2) = \cos(-\pi/2) = 0$,

on obtient

$$\mathcal{F}_y^{\pm} f = \begin{cases}\dfrac{-4\cos(\pi y)}{4y^2-1} \text{ si } y\in\mathbb{R}\setminus\{-1/2,1/2\}\\ \pi \quad \text{si } y\in\{-1/2,1/2\}.\end{cases}$$

(b) Vu sa définition, g est continu sur $\mathbb{R}\setminus\{-1/2,1/2\}$. Mais comme $g = \frac{-1}{4}\mathcal{F}^{\pm}f$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1/2,1/2\}$ et comme toute transformée de Fourier est continue sur $\mathbb{R}$, il en découle que g admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$. En outre, on a $\lim_{x\to\pm\infty}|x|^{3/2}|g(x)| = 0$, ce qui prouve que g est intégrable sur $\mathbb{R}$. Une autre façon de justifier l'intrégrabilité de g est d'appliquer les critères de comparaison, puisque $|g(x)| \leq 1/(4x^2-1)$ si $x \in]-\infty,-1/2[\cup]1/2,+\infty[$ et puisque la fonction $x\mapsto 1/(4x^2-1)$ est intégrable en $-\infty$ et $+\infty$. Dès lors, pour $y\in\mathbb{R}$, on a

$$\mathcal{F}_y^{\pm} g = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_y^{\pm}\mathcal{F}^{\mp} f = -\frac{\pi}{2}f(y) = -\frac{\pi}{2}\cos(y/2)\chi_{[-\pi,\pi]}(y)$$

par le théorème de Fourier, car f est continu sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. On considère les fonctions f et g (de deux variables réelles) définies par

$$f(x,y) = e^{-y}(x^2+y^2) \quad \textbf{et} \quad g(x,y) = 3x^4+y^4.$$

(a) Rechercher les éventuels extrema libres de la fonction f. Préciser s'ils sont globaux ou non, stricts ou non stricts.

(b) S'ils existent, déterminer les extrema globaux de g sur le disque

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Solution :

(a) Il est clair que $f \in C_2(\mathbb{R}^2)$. Comme $D_x f(x,y) = 2xe^{-y}$ et $D_y f(x,y) = (2y - x^2 - y^2)e^{-y}$, les points stationnaires de f vérifient

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ 2y - y^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y(2-y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \text{ ou } y = 2. \end{array}\right.$$

Ainsi, $(0,0)$ et $(0,2)$ constituent les deux points stationnaires de f (sur $\mathbb{R}^2$). Or, on vérifie facilement que

$$f(x,y) > 0 = f(0,0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

ce qui prouve d'ores et déjà que $(0,0)$ est minimum global strict pour f.

Il ne reste plus qu'à étudier le point $(0,2)$. Pour ce faire, la matrice hessienne de f s'écrit

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{-y} & -2xe^{-y} \\ -2xe^{-y} & (2 - 4y + x^2 + y^2)e^{-y} \end{pmatrix}.$$

Comme $\det(H_f(0,2)) = -4e^{-4} < 0$, cela implique que $(0,2)$ n'est pas un extremum de f.

(b) Puisque g est continu sur D, qui est lui-même un ensemble borné fermé, il y admet nécessairement (au moins) un minimum global et un maximum global.

(1) <u>À l'intérieur de D :</u>
Vu que $g \in C_2(\mathbb{R}^2)$, on peut rechercher les points stationnaires de g à l'intérieur de D. Comme $D_x g(x,y) = 12x^3$ et $D_y g(x,y) = 4y^3$, on voit que g admet un unique point stationnaire en $(0,0)$ (qui est bien à l'intérieur de D). Or, on a

$$g(x,y) \geq 0 = g(0,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

ce qui prouve qui $(0,0)$ est minimum global strict de g sur $\mathbb{R}^2$ et donc en particulier sur D. Par conséquent, il ne nous reste plus qu'à trouver les maxima globaux de g sur D, qui seront nécessairement sur le cercle bordant D.

(2) <u>Sur le bord de D, c'est-à-dire $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$:</u>
Recherchons les maxima de g sur C. Si $(x,y) \in C$, il est clair que

$$g(x,y) = 3x^4 + y^4 = 3x^4 + (4 - x^2)^2 = 4x^4 - 8x^2 + 16 = 4(x^4 - 2x^2 + 4),$$

avec $x \in [-2,2]$. Il suffit donc de rechercher les maxima de la fonction

$$h : x \mapsto x^4 - 2x^2 + 4$$

sur $[-2,2]$. Or, on vérifie facilement que $Dh(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$ si $x \in \mathbb{R}$, ce qui donne le tableau de signes suivant :

x	- 2		- 1		0		1		2
$4x$		-		-	0	+		+	
x^2-1		+	0	-		-	0	+	
$D_x h(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
h	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max

Cela montre que les "candidats-maxima" de h sur $[-2,2]$ sont -2, 0 et 2. Or $h(-2) = h(2) = 12$ et $h(0) = 4$, donc -2 et 2 sont les maxima globaux (non stricts) de h sur $[-2,2]$. En traduisant cela au niveau de g, on en déduit que les maxima globaux de g sur C sont les points $(2,0)$ et $(-2,0)$.

(3) <u>Conclusion :</u>
Sur D, g admet un minimum global strict en $(0,0)$ et deux maxima globaux non stricts en $(2,0)$ et $(-2,0)$.

<u>Exercice 3</u> (géométrologues uniquement). Soit f la fonction d'une variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} 1 & \textbf{si} & x \in]0,\pi] \ ; \\ -1 & \textbf{si} & x \in [-\pi, 0[\ ; \\ 0 & \textbf{sinon}. & \end{array}\right.$$

(a) Si possible, développer f en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([-\pi,\pi])$. Simplifier au maximum le développement et l'exprimer uniquement au moyen de fonctions sinus et cosinus.

(b) En déduire la somme de la série

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}.$$

Solution :

(a) Comme $|f^2(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [-\pi,\pi]$ et comme la fonction constante $x \mapsto 1$ est intégrable sur $[-\pi,\pi]$ (par continuité sur un borné fermé), on en déduit que $f \in L^2([-\pi,\pi])$.
Une base de l'espace $L^2([-\pi,\pi])$ est donnée par la famille de fonctions

$$u_0 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad u_m : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(mx) \quad \text{et} \quad v_m : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx)$$

avec $m \in \mathbb{N}_0$. Il est alors facile de voir que

$$r_0 :=< f, u_0 >_{L^2([-\pi,\pi])}= 0 \quad \text{et} \quad r_m :=< f, u_m >_{L^2([-\pi,\pi])}= 0$$

quel que soit $m \in \mathbb{N}_0$, en utilisant l'imparité de la fonction f. Ensuite, il vient

$$\begin{aligned}
s_m =< f, v_m >_{L^2([-\pi,\pi])} &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{v_m(x)}\,dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} \sin(mx)\,dx \qquad \text{(en utilisant la parité du produit à intégrer)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{-\cos(mx)}{m}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1-(-1)^m}{m} \\
&= \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{\pi}m} & \text{si } m \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } m \text{ est pair.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Au total, on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= r_0u_0(x) + \sum_{m=1}^{+\infty}(r_m u_m(x) + s_m v_m(x)) \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{4}{\sqrt{\pi}(2m+1)}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin((2m+1)x) \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1}
\end{aligned}$$

et la convergence a lieu dans $L^2([-\pi,\pi])$.

(b) Puisque, d'une part, $\sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^m$ quel que soit $m \in \mathbb{N}_0$ et, d'autre part, la fonction f est de classe C_1 par morceaux sur $]-\pi,\pi[$, on sait que

$$1 = \frac{f((\pi/2)^+) + f((\pi/2)^-)}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1},$$

d'où

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}.$$

<u>Exercice 4</u> (géométrologues uniquement). Soient d_1 et d_2 les droites d'équations cartésiennes

$$d_1 \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ x-z-1=0 \end{cases} \qquad \textbf{et} \qquad d_2 \equiv \begin{cases} x+y-7=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}.$$

(a) Donner des équations paramétriques cartésiennes de d_1.

(b) Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles, sécantes, gauches, orthogonales ?Justifier.

(c) Rechercher une équation cartésienne du plan contenant la droite d_1 et passant par l'origine.

Solution :

(a) Un point de la droite est donné par $P_0(1,-2,0)$ et un de ses vecteurs directeurs est donné par $\vec{v_1}(-1,1,-1)$. Donc des équations paramétriques de d sont par exemple données par

$$\begin{cases} x = 1 - r \\ y = -2 + r \\ z = -r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}).$$

(b) Le vecteur $\vec{v_2}(0,0,-2)$ est directeur pour d_2. Comme $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas multiples l'un de l'autre, les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles. De plus, le système

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \\ x + y - 7 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

est clairement impossible (vu que les première et troisième lignes sont contradictoires), ce qui prouve que les deux droites ne sont pas non plus sécantes. Elles sont donc gauches. Enfin, il est clair que

$$\vec{v_1} \bullet \vec{v_2} = 2 \neq 0,$$

ce qui signifie que les droites d_1 et d_2 ne sont pas orthogonales.

(c) Si l'on note Π_0 le plan recherché, il vérifie une équation cartésienne de la forme

$$\Pi_0 \equiv r(x + y + 1) + s(x - z - 1) = 0,$$

où $(r,s) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est à déterminer. Si l'origine appartient à Π_0, alors on doit avoir $r - s = 0$, c'est-à-dire $r = s$. On conclut donc que

$$\Pi_0 \equiv 2x + y - z = 0.$$