
5. Géométrie Analytique

Exercice 1. On donne le plan Π et la droite d par leurs équations cartésiennes

$$\Pi \equiv x + y + z + 1 = 0 \quad \text{et} \quad d \equiv \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - z = 1 \end{cases} .$$

- Donner des équations paramétriques cartésiennes de Π ainsi qu'un vecteur normal à Π .
- La droite d et le plan Π sont-ils parallèles? Pourquoi?
- La droite d et le plan Π sont-ils orthogonaux? Pourquoi?
- S'il existe, déterminer des équations cartésiennes du plan contenant d et orthogonal à Π .
- Soit S le point d'intersection de Π et d et soit A le point de d de coordonnées $(2, -1, 3)$. Déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur \overrightarrow{SA} sur le plan Π .

Exercice 2. On donne le plan Π d'équation cartésienne

$$\Pi \equiv 2x - 2y + z + 1 = 0.$$

- Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de Π .
- Déterminer des équations cartésiennes de la droite d_0 passant par l'origine et orthogonale à Π .
- Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de d_0 .

Exercice 3. On considère les droites d_1 et d_2 d'équations cartésiennes données par

$$d_1 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad d_2 \equiv \begin{cases} z = 1 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} .$$

Quelle est la position relative des droites d_1 et d_2 ? Si elles sont gauches, déterminer des équations cartésiennes de la perpendiculaire commune à ces deux droites. Si elles sont coplanaires, déterminer une équation cartésienne du plan qui contient ces deux droites.

Exercice 4. (a) Déterminer une équation cartésienne du plan Π passant par le point P de coordonnées $(1, 1, 1)$ et incluant la droite d d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ y + 2z = -3 \end{cases} .$$

- En fonction d'un ou plusieurs paramètres, donner une équation cartésienne pour les plans orthogonaux à Π qui passent par l'origine du repère.
- Parmi les plans évoqués dans le point précédent, donner une équation cartésienne pour le plan Π' dont l'intersection avec Π est parallèle à d .

Exercice 5. Soient d_1 et d_2 les droites d'équations cartésiennes

$$d_1 \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad d_2 \equiv \begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} .$$

- Donner des équations paramétriques cartésiennes de d_1 .
- Montrer que les droites d_1 et d_2 sont gauches.
- Rechercher une équation cartésienne du plan contenant la droite d_1 et passant par l'origine.

Exercice 6. Si $\lambda \in \mathbb{R}_0$, on désigne par Π_λ le plan d'équation cartésienne

$$\Pi_\lambda \equiv 3\lambda^2 x - \lambda^2 y + \lambda z - 2 = 0.$$

Montrer que tous les plans Π_λ (avec $\lambda \in \mathbb{R}_0$) sont parallèles à un même vecteur.

Exercice 7. Soit P le point de coordonnées $(1, 3, -2)$ et soient le plan Π_0 et la droite d_0 donnés par leurs équations cartésiennes

$$\Pi_0 \equiv 2x - 3y + 2z = 1 \quad \text{et} \quad d_0 \equiv \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x - z = -2 \end{cases}.$$

Rechercher une équation cartésienne du plan Π contenant le point P , parallèle à la droite d_0 et orthogonal au plan Π_0 .

Exercice 8. On donne le plan Π et la droite d par leurs équations cartésiennes

$$\Pi \equiv x + y - z = 0 \quad \text{et} \quad d \equiv \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ 2y - z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Déterminer des équations cartésiennes de la droite symétrique orthogonale par rapport au plan Π de la droite d .

Exercice 9. Si P et Q sont deux points de l'espace, on appelle *plan médiateur du segment* $[P, Q]$ le plan orthogonal à la droite PQ et passant par le milieu du segment $[P, Q]$.

On considère les points A et B de coordonnées respectives $(-2, 1, 4)$ et $(4, -3, 2)$. Donner une équation cartésienne du plan médiateur du segment $[A, B]$.

Exercice 10. On donne les droites d_1 et d_2 d'équations cartésiennes

$$d_1 \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad d_2 \equiv \begin{cases} 8x + y + z - 2 = 0 \\ 3x + 2z = 1. \end{cases}$$

- Donner des équations paramétriques de la droite d_1 .
- Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles, orthogonales, sécantes? Justifier.
- S'il existe, donner une équation cartésienne du plan Π contenant la droite d_1 et parallèle à la droite d_2 .

Exercice 11. On donne la droite d et le plan Π d'équations cartésiennes respectives

$$d \equiv \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x - z = -2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \Pi \equiv 2x - 3y + 2z - 1 = 0.$$

- Donner des équations paramétriques du plan Π .
- La droite d et le plan Π sont-ils parallèles, sécants, orthogonaux? Justifier.
- S'il existe, donner une équation cartésienne du plan Π_0 contenant la droite d et orthogonal au plan Π .