

---

## 5. Géométrie Analytique

---

**Exercice 1.** On donne le plan  $\Pi$  et la droite  $d$  par leurs équations cartésiennes

$$\Pi \equiv x + y + z + 1 = 0 \quad \text{et} \quad d \equiv \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - z = 1 \end{cases} .$$

- (a) Donner des équations paramétriques cartésiennes de  $\Pi$  ainsi qu'un vecteur normal à  $\Pi$ .
- (b) La droite  $d$  et le plan  $\Pi$  sont-ils parallèles? Pourquoi?
- (c) La droite  $d$  et le plan  $\Pi$  sont-ils orthogonaux? Pourquoi?
- (d) S'il existe, déterminer des équations cartésiennes du plan contenant  $d$  et orthogonal à  $\Pi$ .
- (e) Soit  $S$  le point d'intersection de  $\Pi$  et  $d$  et soit  $A$  le point de  $d$  de coordonnées  $(2, -1, 3)$ . Déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur  $\overrightarrow{SA}$  sur le plan  $\Pi$ .

**Exercice 2.** On donne le plan  $\Pi$  d'équation cartésienne

$$\Pi \equiv 2x - 2y + z + 1 = 0.$$

- (a) Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de  $\Pi$ .
- (b) Déterminer des équations cartésiennes de la droite  $d_0$  passant par l'origine et orthogonale à  $\Pi$ .
- (c) Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de  $d_0$ .

**Exercice 3.** (a) Déterminer une équation cartésienne du plan  $\Pi$  passant par le point  $P$  de coordonnées  $(1, 1, 1)$  et incluant la droite  $d$  d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ y + 2z = -3 \end{cases} .$$

- (b) En fonction d'un ou plusieurs paramètres, donner une équation cartésienne pour les plans orthogonaux à  $\Pi$  qui passent par l'origine du repère.
- (c) Parmi les plans évoqués dans le point précédent, donner une équation cartésienne pour le plan  $\Pi'$  dont l'intersection avec  $\Pi$  est parallèle à  $d$ .

**Exercice 4.** Soient  $d_1$  et  $d_2$  les droites d'équations cartésiennes

$$d_1 \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad d_2 \equiv \begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} .$$

- (a) Donner des équations paramétriques cartésiennes de  $d_1$ .
- (b) Montrer que les droites  $d_1$  et  $d_2$  sont gauches.
- (c) Rechercher une équation cartésienne du plan contenant la droite  $d_1$  et passant par l'origine.

**Exercice 5.** Si  $\lambda \in \mathbb{R}_0$ , on désigne par  $\Pi_\lambda$  le plan d'équation cartésienne

$$\Pi_\lambda \equiv 3\lambda^2x - \lambda^2y + \lambda z - 2 = 0.$$

Montrer que tous les plans  $\Pi_\lambda$  (avec  $\lambda \in \mathbb{R}_0$ ) sont parallèles à un même vecteur.

**Exercice 6.** Soit  $P$  le point de coordonnées  $(1, 3, -2)$  et soient le plan  $\Pi_0$  et la droite  $d_0$  donnés par leurs équations cartésiennes

$$\Pi_0 \equiv 2x - 3y + 2z = 1 \quad \text{et} \quad d_0 \equiv \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x - z = -2 \end{cases} .$$

Rechercher une équation cartésienne du plan  $\Pi$  contenant le point  $P$ , parallèle à la droite  $d_0$  et orthogonal au plan  $\Pi_0$ .

**Exercice 7.** On donne le plan  $\Pi$  et la droite  $d$  par leurs équations cartésiennes

$$\Pi \equiv x + y - z = 0 \quad \text{et} \quad d \equiv \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ 2y - z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Déterminer des équations cartésiennes de la droite symétrique orthogonale par rapport au plan  $\Pi$  de la droite  $d$ .

**Exercice 8.** Si  $P$  et  $Q$  sont deux points de l'espace, on appelle *plan médiateur du segment*  $[P, Q]$  le plan orthogonal à la droite  $PQ$  et passant par le milieu du segment  $[P, Q]$ .

On considère les points  $A$  et  $B$  de coordonnées respectives  $(-2, 1, 4)$  et  $(4, -3, 2)$ . Donner une équation cartésienne du plan médiateur du segment  $[A, B]$ .

**Exercice 9.** On donne les droites  $d_1$  et  $d_2$  d'équations cartésiennes

$$d_1 \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad d_2 \equiv \begin{cases} 8x + y + z - 2 = 0 \\ 3x + 2z = 1. \end{cases}$$

- (a) Donner des équations paramétriques de la droite  $d_1$ .
- (b) Les droites  $d_1$  et  $d_2$  sont-elles parallèles, orthogonales, sécantes? Justifier.
- (c) S'il existe, donner une équation cartésienne du plan  $\Pi$  contenant la droite  $d_1$  et parallèle à la droite  $d_2$ .

**Exercice 10.** On donne la droite  $d$  et le plan  $\Pi$  d'équations cartésiennes respectives

$$d \equiv \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x - z = -2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \Pi \equiv 2x - 3y + 2z - 1 = 0.$$

- (a) Donner des équations paramétriques du plan  $\Pi$ .
- (b) La droite  $d$  et le plan  $\Pi$  sont-ils parallèles, sécants, orthogonaux? Justifier.
- (c) S'il existe, donner une équation cartésienne du plan  $\Pi_0$  contenant la droite  $d$  et orthogonal au plan  $\Pi$ .