Travail dirigé

Transformée de Fourier et produit de convolution

Exercice 1. Soit la fonction

$$f(x) = \left(1 - x^2\right)\ \chi_{[-1,1]}(x), \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(1) Si possible, déterminer la transformée de Fourier $(-)$ de f.

(2) Si possible, en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^3}\, dx.$$

Exercice 2. Soit la fonction

$$f_a(x) = e^{-a|x|},\ x \in \mathbb{R}\,.$$

(1) Déterminer les transformées de Fourier ($+$ et $-$) de la fonction f_a (en explicitant les calculs y conduisant).

(2) En déduire les valeurs des intégrales suivantes :

$$(a) \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{9+x^2}\, dx \qquad\qquad (b) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\, dx.$$

(3) Vérifier le résultat obtenu en (b) dans le point précédent à l'aide du théorème de dérivation des intégrales paramétriques.

(4) Montrer que le produit de convolution (s'il existe) de la fonction f_a avec elle-même est donné par

$$(f_a \star f_a)(y) = \frac{1+a|y|}{a}\, e^{-a|y|}, \quad y \in \mathbb{R}\,.$$

Exercice 3. Soient les fonctions

$$f(x) = \cos(2x)\ \chi_{[-\pi,\pi]}(x), x \in \mathbb{R}, \qquad \text{et} \qquad g(x) = \chi_{[-\pi,\pi]}(x), x \in \mathbb{R}\,.$$

(1) Calculer (si possible) les transformées de Fourier de f et g.

(2) Calculer (si possible) la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\pi x)}{x^2-4}\, dx.$$

Exercice 4. Démontrer les propriétés suivantes.

(1) Les transformées de Fourier positive et négative d'une fonction paire sont toujours égales.

(2) Soient des fonctions f et g intégrables sur $\mathbb{R}$. Si f et g sont paires, alors leur produit de convolution $f \star g$ est également paire.

Exercice 5. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier !

(1) La fonction $y \mapsto \frac{y^2+1}{y^2}$ est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.

(2) La fonction $y \mapsto \frac{2\sin(3y)}{y}$ est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.

(3) Il existe une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ dont la transformée de Fourier est une constante non nulle.

(4) Il n'existe aucune fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ dont la transformée de Fourier admet une asymptote verticale.

(5) Si deux fonctions sont intégrables sur $\mathbb{R}$, alors leur produit de convolution est défini.

(6) Le produit de convolution de deux fonctions peut être défini sans que les fonctions ne soient toutes deux intégrables dans $\mathbb{R}$.

Extrema libres et sous contrainte

Exercice 1. Déterminer les éventuels extrema libres des fonctions définies explicitement ci-dessous. Préciser s'ils sont globaux ou non. Justifier.

(a) $f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 4y$ $\qquad$ (b) $f_2(x,y) = \sin(x)\cos(y)$

(c) $f_3(x,y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3y^3 - 150x$ $\qquad$ (d) $f_4(x,y) = \frac{(x+y)^2}{xy}$

Exercice 2. Reprendre la fonction f_2 de l'exercice précédent et déterminer ses éventuels extrema globaux sur le triangle fermé (à représenter) délimité par les axes et la droite $x + y = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 3. On considère la fonction f (de 2 variables réelles x et y) définie explicitement par

$$f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2).$$

(1) Rechercher les éventuels extrema libres de f. Préciser s'ils sont globaux ou non, stricts ou non stricts.

(2) S'ils existent, déterminer les extrema globaux de f sur le disque $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1\}$.

Exercice 4. On considère la fonction f (de 2 variables réelles x et y) définie explicitement par

$$f(x,y) = y^2 - x^2y + x^2.$$

(1) Rechercher les éventuels extrema libres de f. Préciser s'ils sont globaux ou non, stricts ou non stricts.

(2) S'ils existent, déterminer les extrema globaux de f sur l'ensemble fermé (à représenter !) $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - 1 \le y \le 1 - x^2\}$.

Exercice 5. On considère la fonction f (de 2 variables réelles x et y) définie explicitement par

$$f(x,y) = y^3 + 3x^3y - 6x^2 - 6y^2 + 2.$$

(1) Rechercher les éventuels extrema libres de f. Préciser s'ils sont globaux ou non, stricts ou non stricts.

(2) S'ils existent, déterminer les extrema globaux de f sur le disque $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1\}$.

(3) S'ils existent, déterminer les extrema globaux de f sur le disque $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 4\}$.

Quelques applications (juste pour le fun ! ;-))

Exercice 6. Déterminer la distance[1] du point $(3,0)$ à la parabole d'équation cartésienne $y = x^2$.

Exercice 7. Un chimiste veut créer une substance mousseuse en utilisant deux produits X et Y. Le volume de la mousse engendrée est donné, en fonction des quantités x et y des produits utilisés, par

$$V(x,y) = x^3 - 2x^2y + 2y - 1$$

Sachant que les quantités de ces deux produits mises à sa disposition sont limitées indépendamment l'une de l'autre selon

$$0 \le x \le 2, \qquad 0 \le y \le 1$$

quelles quantités des deux produits doit-il utiliser pour obtenir un volume maximum ? Quel est ce volume ?

Exercice 8. Un modèle météorologique stipule que la température en un point (x,y) (sur une carte en 2D) est donné par $T(x,y) = y^2 + x^2$ et l'ensoleillement par $E(x,y) = xy$. Déterminer les extrema globaux (s'il existent) de

(1) l'ensoleillement E sur l'isotherme[2] $T(x,y) = 4$;

(2) la température sur la courbe de niveau $E(x,y) = 1$ de l'ensoleillement.

F. Bastin et C. Dozot – 7 novembre 2022

1. La distance d'un point $P(a,b)$ à une courbe $\mathcal{C}$ quelconque correspond au minimum des distances entre P et tout point de $\mathcal{C}$. Rappelons que la distance entre deux points $P(a,b)$ et $Q(x,y)$ est donnée par $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$.
2. Un isotherme est une courbe le long de laquelle la température est constante.