Compléments de Mathématiques Générales (Math2014)
2020-2021

Compléments de calcul matriciel

Soit une matrice réelle symétrique
$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$
On a les résultats suivants

<u>Propriétés</u>

1. *Les valeurs propres λ_1, λ_2 de A sont réelles.*
2. *La matrice A est toujours diagonalisable par une matrice S telle que $\widetilde{S}S = I$ (I désigne la matrice identité).*
3. *Les deux valeurs propres sont strictement positives (resp. négatives) si et seulement si $\widetilde{X}AX > 0$ (resp. $\widetilde{X}AX < 0$) pour tout vecteur colonne non nul X.*
   Si $\lambda_1\lambda_2 < 0$ alors $\widetilde{X}AX$ peut changer de signe en fonction de X.
4. *Les deux valeurs propres sont strictement positives (resp. négatives) si et seulement si le déterminant de A est strictement positif et $a > 0$ (resp. $a < 0$).*
   On a $\lambda_1\lambda_2 < 0$ si et seulement si le déterminant de A est strictement négatif.

Preuve Pour (1), (3) et (4) : voir cours.
(2) Soit
$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
un vecteur propre réel de valeur propre λ_1. Quitte à le multiplier par une constante non nulle, on peut supposer que
$$x_1^2 + y_1^2 = \widetilde{X_1}X_1 = 1.$$
Cela étant, définissons S par
$$S = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}.$$
On obtient immédiatement
$$\widetilde{S}S = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$
Montrons alors que
$$S^{-1}AS = \widetilde{S}AS$$
est une matrice diagonale. La première colonne de S est le vecteur propre X_1 ; notons Z la seconde colonne de S et remarquons que X_1 et Z sont des vecteurs colonnes orthogonaux, c'est-à-dire $\widetilde{X_1}Z = 0 = \widetilde{Z}X_1$. Cela étant, les colonnes de la matrice AS sont les vecteurs AX_1 et AZ ; on peut donc écrire
$$AS = \left(AX_1 \ AZ\right).$$
On obtient ainsi
$$\widetilde{S}AS = \begin{pmatrix} \widetilde{X_1} \\ \widetilde{Z} \end{pmatrix}\left(AX_1 \ AZ\right) = \begin{pmatrix} \widetilde{X_1}AX_1 & \widetilde{X_1}AZ \\ \widetilde{Z}AX_1 & \widetilde{Z}AZ \end{pmatrix}.$$
Comme X_1 est vecteur propre de A de valeur propre λ_1 et tel que $\widetilde{X_1}X_1 = 1$, on a $AX_1 = \lambda_1X_1$ et
$$\widetilde{S}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \widetilde{X_1}AZ \\ \lambda_1\widetilde{Z}X_1 & \widetilde{Z}AZ \end{pmatrix}.$$

Mais $\widetilde{Z}X_1 = 0$ donc

$$\widetilde{S}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \widetilde{X_1}AZ \\ 0 & \widetilde{Z}AZ \end{pmatrix}.$$

On sait aussi que A est symétrique, c'est-à-dire $\widetilde{A} = A$. Ainsi,

$$\widetilde{\widetilde{S}AS} = \widetilde{S}\widetilde{A}S = \widetilde{S}AS.$$

La matrice

$$\widetilde{S}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \widetilde{X_1}AZ \\ 0 & \widetilde{Z}AZ \end{pmatrix}$$

est donc symétrique, c'est-à-dire que ses éléments situés de part et d'autre de la diagonale principale sont égaux. Il s'ensuit que $\widetilde{X_1}AZ = 0$ donc que $\widetilde{S}AS$ est une matrice diagonale. $\square$

Remarque :
une matrice S telle que $\widetilde{S}S = I$ est appelée *matrice orthogonale*. On a alors $S^{-1} = \widetilde{S}$ et $S\widetilde{S} = I$. Les égalités $\widetilde{S}S = I$ et $S\widetilde{S} = I$ signifient que les colonnes de S ont des vecteurs orthonormés, de même que les lignes.