MATH2014 Ecrit de janvier 2022

Corrigé succinct des exercices

**Question 1 On considère les fonctions $f$ et $g$ (d'une variable réelle) définies par**

$$f(x) = xe^{-|x|} \qquad \textbf{et} \qquad g(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

1. **Calculer (si possible) les transformées de Fourier (+ et -) de $f$.**
2. **Si cela a du sens, faire de même avec $g$.**
3. **Si possible, calculer**

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(1+x^2)^4}\, dx.$$

*Solution.*

1. Tout d'abord, la fonction $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (car ...).
Ensuite, pour $y \in \mathbb{R}$, on a sucessivement

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y^{\pm} f &= \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy}\ x\ e^{-|x|}\, dx \\ &= \pm 2i \int_0^{+\infty} x \sin(xy)\ e^{-x}\, dx \\ &= \pm 2i\ \Im \int_0^{+\infty} x\ e^{(iy-1)x}\, dx. \end{aligned}$$

En intégrant par parties et en tenant compte du fait que $\lim_{x\to+\infty} xe^{(iy-1)x} = 0$ (car ...), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y^{\pm} f &= \pm 2i\ \Im \left( -\int_0^{+\infty} \frac{e^{(iy-1)x}}{iy-1}\, dx \right) \\ &= \pm 2i\ \Im \left( \frac{1}{(iy-1)^2} \right) \\ &= \pm 2i\ \Im \left( \frac{(iy+1)^2}{(iy-1)^2(iy+1)^2} \right) \\ &= \pm 2i\ \Im \left( \frac{-y^2+2iy+1}{(-y^2-1)^2} \right) \\ &= \frac{\pm 4iy}{(1+y^2)^2}. \end{aligned}$$

2. On vérifie aussi rapidement que $g$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus, vu ce qui précède, on a $g = (\mp i/4)\ \mathcal{F}^{\pm} f$. Donc, si $y \in \mathbb{R}$, il vient

$$\mathcal{F}_y^{\pm} g = \frac{\pm i}{4} \mathcal{F}_y^{\pm} \left( \mathcal{F}^{\mp} f \right) = \frac{\pm i\pi}{2} f(y) = \frac{\pm i\pi}{2} y e^{-|y|}$$

par le théorème de Fourier et car $f$ est continu sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction à intégrer est bien intégrable sur $\mathbb{R}$ car ...On a alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(1+x^2)^4}\, dx &= \int_{\mathbb{R}} g^2(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{-i}{4}\mathcal{F}_x^+ f\right)\left(\frac{i}{4}\mathcal{F}_x^- f\right)\, dx \\
&= \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{F}_x^+ f\right)\left(\mathcal{F}_x^- f\right)\, dx \\
&= \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}} f(x)\ \mathcal{F}_x^+\left(\mathcal{F}^- f\right)\, dx \qquad \text{(théorème de transfert)} \\
&= \frac{\pi}{8}\int_{\mathbb{R}} f^2(x)\, dx \qquad \text{(théorème de Fourier)} \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x}\, dx.
\end{aligned}$$

En effectuant deux intégrations par parties consécutives, on arrive alors à

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(1+x^2)^4}\, dx = \frac{\pi}{16}.$$

**Question 2 On considère la fonction $f$ (de deux variables réelles) définie par**

$$f(x,y) = x^3 + 2y^3 + 3xy^2 - 6x.$$

1. **Rechercher les éventuels extrema libres de la fonction $f$. Préciser s'ils sont globaux ou non, stricts ou non stricts.**
2. **S'ils existent, déterminer les extrema globaux de $f$ sur le cercle de rayon $\sqrt{2}$ centré à l'origine.**
3. **Même question, mais sur l'ensemble (à représenter).**

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$$

*Solution (succincte).*

1. La fonction appartient à $C_\infty(\mathbb{R}^2)$ et on a

$$D_1 f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 6,\ D_2 f(x,y) = 6y^2 + 6xy$$

et

$$D_1^2 f(x,y) = 6x,\ D_2^2 f(x,y) = 12y + 6x,\ D_1 D_2 f(x,y) = 6y.$$

Cela étant, les points stationnaires sont donc les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{l} 3x^2 + 3y^2 - 6 = 0 \\ 6y^2 + 6xy = 0. \end{array}\right.$$

On a successivement

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} 3x^2 + 3y^2 - 6 = 0 \\ 6y^2 + 6xy = 0 \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ y(y+x) = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y = -x \\ x^2 = 1. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Les points stationnaires ont donc pour coordonnées cartésiennes

$$(\sqrt{2},0),\ (-\sqrt{2},0),\ (1,-1),\ (-1,1).$$

Les matrices hessiennes sont

$$H_f(\sqrt{2},0) \ = \ \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 6\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad H_f(-\sqrt{2},0) \ = \ -H_f(\sqrt{2},0)$$

et

$$H_f(1,-1) \ = \ \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}, \quad H_f(-1,1) \ = \ -H_f(1,-1).$$

Vu les propriété de ces matrices (...), on obtient finalement que $(\sqrt{2},0)$ est un minimum local strict, que $(-\sqrt{2},0)$ est un maximum local strict et que les deux autres points stationnaires ne sont pas extrema.

Les extrema ne sont pas globaux car, par exemple

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,0) \ = \ +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x,0) \ = \ -\infty.$$

2. La contrainte a pour équation cartésienne $g(x,y)=0$ avec $g(x,y)=x^2+y^2-2$. Les extrema liés existent puisque $f$ est continu sur $\mathbb{R}^2$ et que la contrainte est une circonférence, donc un borné fermé.

   Cela étant, le système en les inconnues $(x,y,\lambda)$

$$\begin{cases} D_1f(x,y)=\lambda D_1g(x,y) \\ D_2f(x,y)=\lambda D_2g(x,y) \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

   a les solutions $(x,y)$ suivantes

$$(\sqrt{2},0),\ (-\sqrt{2},0),\ (0,\sqrt{2}),\ (0,-\sqrt{2}),\ (1,-1),\ (-1,1).$$

   On a

$$f(\sqrt{2},0)=f(0,-\sqrt{2})=-4\sqrt{2}, \quad f(-\sqrt{2},0)=f(0,\sqrt{2})=4\sqrt{2}$$

   et

$$f(1,-1)=-4, \quad f(1,-1)=4.$$

   Le minimum est donc atteint en $(\sqrt{2},0)$ et en $(0,-\sqrt{2})$ et le maximum en $(\sqrt{2},0)$ et en $(0,\sqrt{2})$.

3. L'ensemble $A$ est l'ensemble des points situés à l'intérieur du cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt{2}$ et qui ont des coordonnées cartésiennes positives.

   Les extrema sont atteints en $(0,\sqrt{2})$, (maximum, valeur de $f$ : $4\sqrt{2}$) et en $(\sqrt{2},0)$ (minimum, valeur de $f$ : $-4\sqrt{2}$).

F. Bastin & L. Demeulenaere,
19 janvier 2022 (V1 17/01/22)