MATH2014 Ecrit de janvier 2023

Corrigé succinct des exercices

Question 1 **On considère les fonctions f et g (d'une variable réelle) définies par**

$$f(x) = |x|\, e^{-|x|} \qquad \textbf{et} \qquad g(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

(a) Si possible, déterminer la valeur de $(f * f)(0)$.

(b) Si possible, déterminer les expressions explicites des transformées de Fourier de f et de g.

(c) En déduire la valeur de

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx.$$

Solution. Tout d'abord, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ (car ...), de même que la fonction g (car ...).

(a) La fonction $x \to f(x)\, f(0-x) = x^2\, e^{-2|x|}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$ (car ...), le produit de composition en 0 existe et on a

$$\begin{aligned}
(f*f)(0) &= \int_{\mathbb{R}} x^2\, e^{-2|x|}\; dx \\
&= 2\int_0^{+\infty} x^2\, e^{-2x}\; dx \quad \text{(car la fonction à intégrer est paire)} \\
&= -\int_0^{+\infty} x^2\, De^{-2x}\; dx \\
&= -\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\, e^{-2x}\right) + 0 + 2\int_0^{+\infty} x\, e^{-2x}\; dx \quad \text{(intégration par parties)} \\
&= 2\int_0^{+\infty} x\, e^{-2x}\; dx \\
&= -\int_0^{+\infty} x\, De^{-2x}\; dx \\
&= -\lim_{x\to+\infty}\left(x\, e^{-2x}\right) + 0 + \int_0^{+\infty} e^{-2x}\; dx \quad \text{(intégration par parties)} \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-2x}\; dx \\
&= \frac{1}{2} \quad \text{(intégration par variation de primitive).}
\end{aligned}$$

(b) On a successivement (utilisation de la parité, calculs standards par parties)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^{\pm} f &= \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy}\, |x|\, e^{-|x|}\; dx \\
&= 2\int_0^{+\infty} \cos(xy)\, x\, e^{-x}\; dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\Re\left(\int_0^{+\infty} e^{ixy}\, x\, e^{-x}\ dx\right)\\
&= 2\Re\left(\int_0^{+\infty} x\, e^{x(iy-1)}\ dx\right)\\
&= 2\Re\left(\frac{1}{iy-1}\int_0^{+\infty} x\, De^{x(iy-1)}\ dx\right)\\
&= -2\Re\left(\frac{1}{iy-1}\int_0^{+\infty} e^{x(iy-1)}\ dx\right) \quad (*)
\end{aligned}
$$

pour (*), qui provient d'une intégration par parties, on utilise notamment

$$\lim_{x\to+\infty} x\, e^{x(iy-1)} = 0,$$

la limite étant nulle car

$$\lim_{x\to+\infty} \left|x\, e^{x(iy-1)}\right| = \lim_{x\to+\infty} x\, e^{-x} = 0.$$

Une intégration directe par variation de primitive donne alors

$$\mathcal{F}_y^{\pm} f \ = \ -2\Re\left(\frac{1}{iy-1}\int_0^{+\infty} e^{x(iy-1)}\ dx\right) \ = \ 2\,\Re\left(\frac{1}{(iy-1)^2}\right).$$

Comme

$$\frac{1}{(iy-1)^2} \ = \ \frac{(-iy-1)^2}{(y^2+1)^2} \ = \ \frac{1-y^2+2iy}{(y^2+1)^2},$$

on obtient finalement

$$\mathcal{F}_y^{\pm} f \ = \ 2\,\Re\left(\frac{1}{(iy-1)^2}\right) \ = \ 2\,\frac{1-y^2}{(y^2+1)^2}.$$

Cela étant, vu la définition de g, on a

$$g(y) \ = \ \frac{1}{2}\,\mathcal{F}_y^{\pm} f$$

donc par le théorème de Fourier

$$\mathcal{F}^{\pm} g \ = \ \frac{1}{2}\,\mathcal{F}^{\pm}\mathcal{F}^{\mp} f \ = \ \pi\, f.$$

(c) On a directement

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\ dx \ = \ \mathcal{F}_0^{\pm} g \ = \pi\, f(0) \ = \ 0$$

puisque f est continu en 0.

Question 2 On considère la fonction f (de deux variables réelles) définie par $f(x,y) = -x^2y + y^2/2 + y$.

(a) Rechercher les éventuels extrema libres de la fonction f. Préciser s'ils sont globaux ou non, stricts ou non stricts.

(b) S'ils existent, déterminer les extrema globaux de f sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine.

Solution.

(a) La fonction appartient à $C_\infty(\mathbb{R}^2)$ et on a

$$D_1 f(x,y) = -2xy,\ D_2 f(x,y) = -x^2+y+1$$

et

$$D_1^2 f(x,y) = -2y,\ D_2^2 f(x,y) = 1,\ D_1 D_2 f(x,y) = -2x.$$

Cela étant, les points stationnaires sont les solutions du système

$$\begin{cases} -2xy = 0 \\ -x^2+y+1 = 0. \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} -2xy = 0 \\ -x^2+y+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 1; \end{cases}$$

les points stationnaires ont donc pour coordonnées cartésiennes

$$(0,-1),\ (-1,0),\ (1,0).$$

La matrice hessienne étant égale à

$$H_f(x,y) \ = \ \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ -2x & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$H_f(0,-1) \ = \ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ H_f(-1,0) \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ H_f(1,0) \ = \ \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vu les propriétés de ces matrices (...), on obtient finalement que $(0,-1)$ est un minimum local strict et que les autres points stationnaires ne sont pas des extrema.
Le minimum local n'est pas global car par exemple

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,1) \ = \ \lim_{x\to+\infty} -x^2+3/2 \ = \ -\infty.$$

(b) La contrainte a pour équation cartésienne $g(x,y)=0$ avec $g(x,y)=x^2+y^2-1$. Les extrema liés existent puisque f est continu sur $\mathbb{R}^2$ et que la contrainte est une circonférence, donc un borné fermé.
Résolution avec les multiplicateurs de Lagrange.
On a

$$\begin{cases} D_1 f(x,y) = \lambda D_1 g(x,y) \\ D_2 f(x,y) = \lambda D_2 g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2xy = 2\lambda x \\ -x^2+y+1 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y+1 = 2\lambda y \\ y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = -\lambda \\ -x^2-\lambda+1 = -2\lambda^2 \\ x^2+y^2 = 1. \end{cases}$$

Le premier système donne les solutions (en (x, y)) égales à $(0, -1)$ et $(0, 1)$. Poursuivons la résolution du second système. On a successivement

$$\left\{\begin{array}{l} y=-\lambda \\ -x^2-\lambda+1=-2\lambda^2 \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y=-\lambda \\ -x^2-\lambda+1=-2\lambda^2 \\ 1-\lambda+2\lambda^2+\lambda^2=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y=-\lambda \\ -x^2-\lambda+1=-2\lambda^2 \\ -\lambda+3\lambda^2=0 \end{array}\right.$$

La troisième équation du système a pour solutions $\lambda = 0$ et $\lambda = 1/3$. Cela conduit aux solutions (en (x, y)) égales à

$$(1, 0),\ (-1, 0),\ (2\sqrt{2}/3, -1/3),\ (-2\sqrt{2}/3, -1/3).$$

Pour terminer, il reste à évaluer f en ces points. On a

$$f(0,-1)=-\frac{1}{2},\ f(0,1)=\frac{3}{2},$$

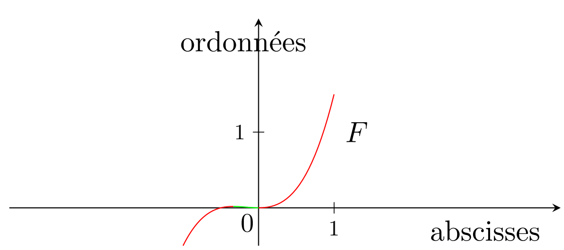
$$f(1,0)=f(-1,0)=0,\ f\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{1}{3}\right)=f\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{54}$$

donc le minimum global est atteint en $(0, -1)$ et le maximum global en $(0, 1)$.

Résolution directe vu les expressions explicites de f et g.
Comme on a $f(x, y) = -x^2y+y^2/2+y$ et que la contrainte s'écrit $x^2+y^2 = 1$, c'est-à-dire $x^2 = 1-y^2$, on voit que la recherche des extrema liés est en fait la recherche des extrema de la fonction

$$F(y)=-(1-y^2)\,y+\frac{y^2}{2}+y=y^3+\frac{y^2}{2},\quad y\in[-1,1].$$

La fonction $y \mapsto y^3 + y^2/2$ est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'expression explicite de sa dérivée est $3y^2 + y = y\,(3y + 1)$; la dérivée est donc à valeurs positives sur $]-\infty, -1/3] \cup [0, +\infty[$ et négatives sur $[-1/3, 0]$. Il s'ensuit que F croît sur $[-1, -1/3]$, décroît sur $[-1/3, 0]$ et croît à nouveau sur $[0, 1]$; dès lors F possède des maxima en $-1/3$ et en 1, où l'on a $F(-1/3) = 1/54$ et $F(1) = 3/2$ et possède des minima en -1 et 0, où l'on a $F(-1) = -1/2$ et $F(0) = 0$.



Le minimum global de f sous la contrainte est donc atteint pour $y = -1$(donc $x = 0$) et le maximum global l'est pour $y = 1$ (donc $x = 0$) et l'on retrouve bien le résultat obtenu par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

F. Bastin & C. Dozot,
16 janvier 2023 (V1 09/12/22)