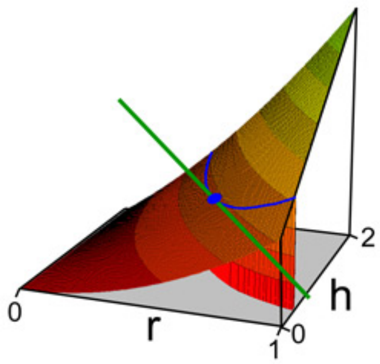
Exemple introductif

Soit v_0 un nombre strictement positif. L'objectif est de trouver la portion de cylindre de rayon r et de hauteur h de surface minimale (couvercles compris) et de volume v_0. Pour cela on définit deux fonctions, v et s qui à $(r,\ h)$ associent respectivement le volume et la surface de la portion de cylindre. On dispose des égalités

$$\forall r, h \in \mathbb{R}_+ \quad v(r,h) = \pi r^2 h \quad \text{et} \quad s(r,h) = 2\pi r(r+h).$$

La figure de droite représente la fonction s, qui à r et h associe la surface. La ligne bleue correspond aux points de volume égal à 1. L'objectif est de trouver le point bleu, de plus petite surface pour un volume égal à 1. La fonction s n'est autre que la fonction φ du préambule. La fonction ψ et la fonction L sont définies par :



La nappe correspond à la surface du cylindre, la courbe bleue aux points de volume égal à v_0, choisi dans la représentation égal à 1.

$$\forall r, h \in \mathbb{R}_+ \quad \psi(r,h) = v(r,h) - v_0 \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad L(r,h,\lambda) = s(r,h) + \lambda\psi(r,h).$$

La méthode de Lagrange consiste à rechercher un point tel que la différentielle de L soit nulle. Sur un tel point, la dérivée partielle par rapport à λ est nulle, ce qui signifie que la fonction ψ est nulle, ou encore que la contrainte est respectée. Si l'on identifie s avec son approximation linéaire tangente, son comportement sur la contrainte, aussi identifiée à son approximation linéaire tangente, est aussi nécessairement nulle à partir de l'ordre 1. Ce comportement est illustré par la droite en vert sur la figure. Le long de cette droite, la fonction ψ est nulle, et le terme d'ordre 1 de la fonction s l'est alors nécessairement.

Il suffit, en conséquence, de calculer la différentielle de L, et plus précisément ses trois dérivées partielles, pour l'exemple choisi :

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 2\pi(h + 2r + \lambda hr) = 0,\ \frac{\partial L}{\partial h} = \pi(2r + \lambda r^2) = 0,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \pi r^2 h - v_0 = 0.$$

On trouve les valeurs suivantes :

$$r = -\frac{2}{\lambda} = \left(\frac{v_0}{2\pi}\right)^{1/3},\ h = -\frac{4}{\lambda} = 2\left(\frac{v_0}{2\pi}\right)^{1/3} \text{ et } \lambda = -2\left(\frac{2\pi}{v_0}\right)^{1/3}.$$

Autrement dit :

$h = 2r$ et $v_0 = \pi r^2 h$, d'où $s = 6\pi r^2$.

Cet exemple possède l'avantage d'une représentation graphique simple, guidant l'intuition. En revanche, la méthode du multiplicateur de Lagrange n'est pas nécessaire dans ce cas : on peut simplement exprimer la valeur de h pour que le volume du cylindre respecte la contrainte imposée au volume v_0. On trouve :

$$h = \frac{v_0}{\pi r^2}.$$

En injectant cette contrainte dans l'équation décrivant l'aire, il vient :

$$s = 2\pi r^2 + \frac{2v_0}{r}$$

et il suffit de trouver la valeur de r minimisant cette fonction pour trouver la solution. De même qu'avec le multiplicateur de Lagrange, on trouve :

$$h = 2r.$$